

<i>Rodzaj dokumentu:</i>	Sprawozdanie za rok 2025
<i>Egzamin:</i>	Egzamin maturalny
<i>Przedmiot:</i>	Matematyka
<i>Poziom:</i>	Poziom podstawowy Poziom rozszerzony
<i>Terminy egzaminów:</i>	6 maja 2025 r. – poziom podstawowy 12 maja 2025 r. – poziom rozszerzony
<i>Data publikacji dokumentu:</i>	19 września 2025 r.

Sprawozdanie zostało opracowane przez Centralną Komisję Egzaminacyjną we współpracy z Okręgową Komisją Egzaminacyjną w Warszawie.

Centralna Komisja Egzaminacyjna

ul. Józefa Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa

tel. 22 536 65 00

www.cke.gov.pl sekretariat@cke.gov.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Warszawie (województwo mazowieckie)

ul. Józefa Bema 87, 01-233 Warszawa

tel. 22 457 03 35

www.oke.waw.pl info@oke.waw.pl

SPIS TREŚCI

Poziom podstawowy	4
Opis arkusza egzaminu maturalnego.....	4
Dane dotyczące populacji zdających	5
Przebieg egzaminu	6
Podstawowe dane statystyczne	7
Poziom rozszerzony	12
Opis arkusza egzaminu maturalnego.....	12
Dane dotyczące populacji zdających	12
Przebieg egzaminu	13
Podstawowe dane statystyczne	14
Komentarz	17
Wnioski i rekomendacje.....	86

POZIOM PODSTAWOWY

Opis arkusza egzaminu maturalnego

W roku szkolnym 2024/2025 egzamin maturalny z matematyki został przeprowadzony na podstawie wymagań podstawy programowej określonej w rozporządzeniu Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r.¹

Arkusz egzaminacyjny z matematyki na poziomie podstawowym zawierał ogółem 35 zadań (ujęte w 31 grup/wiązek tematycznych), na które składało się 25 zadań zamkniętych i 10 zadań otwartych. Zadania sprawdzały wiadomości oraz umiejętności ujęte w czterech obszarach wymagań ogólnych:

- I. Sprawność rachunkowa (3 zadania zamknięte łącznie za 3 punkty).
- II. Wykorzystanie i tworzenie informacji (6 zadań łącznie za 11 punktów, w tym: 2 zadania zamknięte łącznie za 2 punkty oraz 4 zadania otwarte za 9 punktów).
- III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji (19 zadań łącznie za 24 punkty, w tym: 16 zadań zamkniętych łącznie za 16 punktów oraz 3 zadania otwarte łącznie za 8 punktów).
- IV. Rozumowanie i argumentacja (7 zadań łącznie za 12 punktów, w tym: 4 zadania zamknięte łącznie za 4 punkty oraz 3 zadania otwarte łącznie za 8 punktów).

Zdający mogli korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych na egzamin maturalny z matematyki* oraz linijki, cyrkla i kalkulatora prostego.

¹ Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia (Dz.U. z 2024 r. poz. 1019).

Dane dotyczące populacji zdających

TABELA 1. ZDAJĄCY ROZWIĄZUJĄCY ZADANIA W ARKUSZU STANDARDOWYM*

Liczba zdających (Formuła 2023)		45 926
Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym	z liceów ogólnokształcących	34 140
	z techników	11 608
	z branżowych szkół II stopnia	178
	ze szkół na wsi	1 316
	ze szkół w miastach do 20 tys. mieszkańców	7 015
	ze szkół w miastach od 20 tys. do 100 tys. mieszkańców	10 566
	ze szkół w miastach powyżej 100 tys. mieszkańców	27 029
	ze szkół publicznych	36 149
	ze szkół niepublicznych	9 777
	kobiety	24 585
	mężczyźni	21 341
	bez dysleksji rozwojowej	39 044
	z dysleksją rozwojową	6 882
	obywatele Ukrainy ²	76

* Dane w tabeli dotyczą tegorocznych absolwentów.

Z egzaminu zwolniono 32 osoby – laureatów i finalistów Olimpiady Matematycznej.

TABELA 2. ZDAJĄCY ROZWIĄZUJĄCY ZADANIA W ARKUSZACH DOSTOSOWANYCH

Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach dostosowanych	z autyzmem, w tym z zespołem Aspergera	1 411
	słabowidzący	63
	niewidomi	7
	słabosłyszący	89
	niesłyszący	30
	z niepełnosprawnością ruchową spowodowaną mózgowym porażeniem dziecięcym	19
	z zaburzeniem widzenia barw	8
	Ogółem	1 627

² Zdający – obywatele Ukrainy przystąpili do egzaminu maturalnego na podstawie § 3c ust. 1 rozporządzenia Ministra Edukacji i Nauki z dnia 21 marca 2022 r. w sprawie organizacji kształcenia, wychowania i opieki dzieci i młodzieży będących obywatelami Ukrainy (Dz.U. z 2023 r. poz. 2094 z późn. zm.).

Przebieg egzaminu

TABELA 3. INFORMACJE DOTYCZĄCE PRZEBIEGU EGZAMINU

Termin egzaminu			6 maja 2025
Czas trwania egzaminu dla arkusza standardowego			180 minut
Liczba szkół			713
Liczba zespołów egzaminatorów			33
Liczba egzaminatorów weryfikatorów			34
Liczba egzaminatorów			696
Liczba obserwatorów ³ (§ 8 ust. 1)			43
Liczba unieważnień ⁴	w przypadku:		
	art. 44zzv pkt 1	stwierdzenia niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego	4
	art. 44zzv pkt 2	wniesienia lub korzystania przez zdającego w sali egzaminacyjnej z urządzenia telekomunikacyjnego	5
	art. 44zzv pkt 3	zakłócenia przez zdającego prawidłowego przebiegu egzaminu	0
	art. 44zzw ust. 1	stwierdzenia podczas sprawdzania pracy niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego	0
	art. 44zzy ust. 7	stwierdzenie naruszenia przepisów dotyczących przeprowadzenia egzaminu maturalnego	0
	art. 44zzy ust. 10	niemożność ustalenia wyniku (np. zaginięcie karty odpowiedzi)	0
Liczba wglądów ⁴ (art. 44zzz)			1 958

³ Rozporządzenie Ministra Edukacji i Nauki z dnia 1 sierpnia 2022 r. w sprawie egzaminu maturalnego (Dz.U. z 2024 r. poz. 302, z późn. zm.).

⁴ Ustawa z dnia 7 września 1991 r. o systemie oświaty (Dz.U. z 2025 r. poz. 881).

Podstawowe dane statystyczne

Wyniki zdających

WYKRES 1. ROZKŁAD WYNIKÓW ZDAJĄCYCH

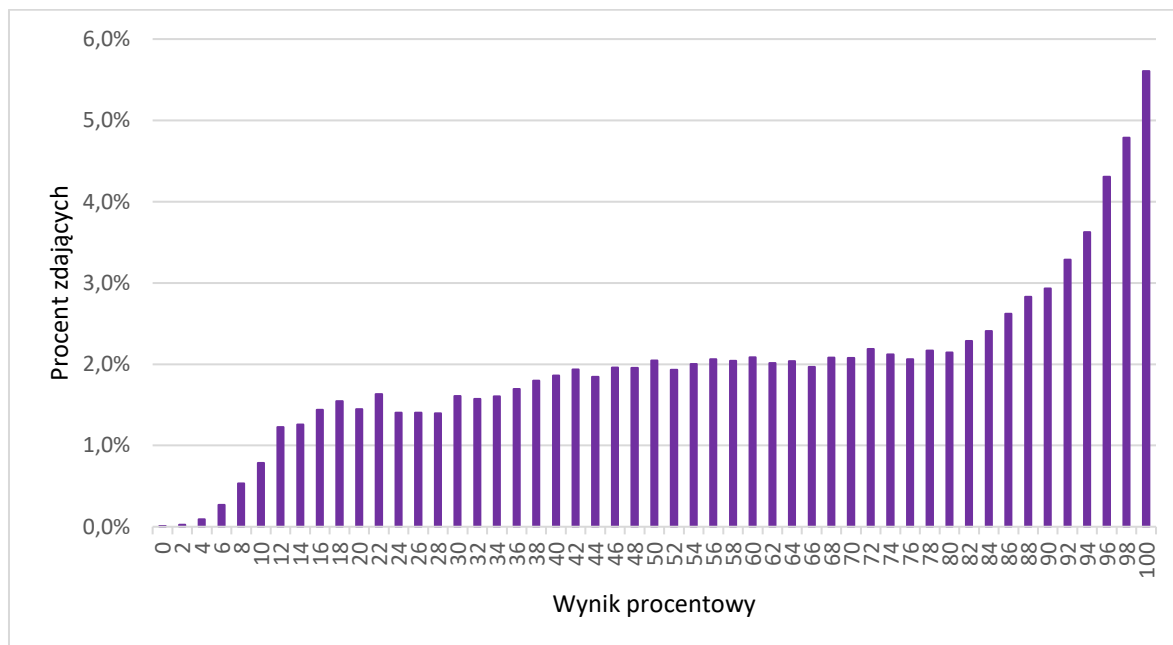


TABELA 4. WYNIKI ZDAJĄCYCH – PARAMETRY STATYSTYCZNE*

Zdający	Liczba zdających	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)	Odsetek sukcesów** (%)
Ogółem Formuła 2023	45 926	0	100	66	100	63	27	89,3
w tym:								
z liceów ogólnokształcących	34 140	0	100	72	100	67	27	91,4
z techników	11 608	0	100	52	50	53	25	84,2
z branżowych szkół II stopnia	178	2	60	16	12	20	11	
obywatele Ukrainy	73	8	100	56	44	59	25	

* Dane dotyczą tegorocznych absolwentów. Parametry statystyczne są podane dla grup liczących 30 lub więcej zdających.

** Dane dotyczą tegorocznych absolwentów, którzy przystąpili do wszystkich egzaminów obowiązkowych.

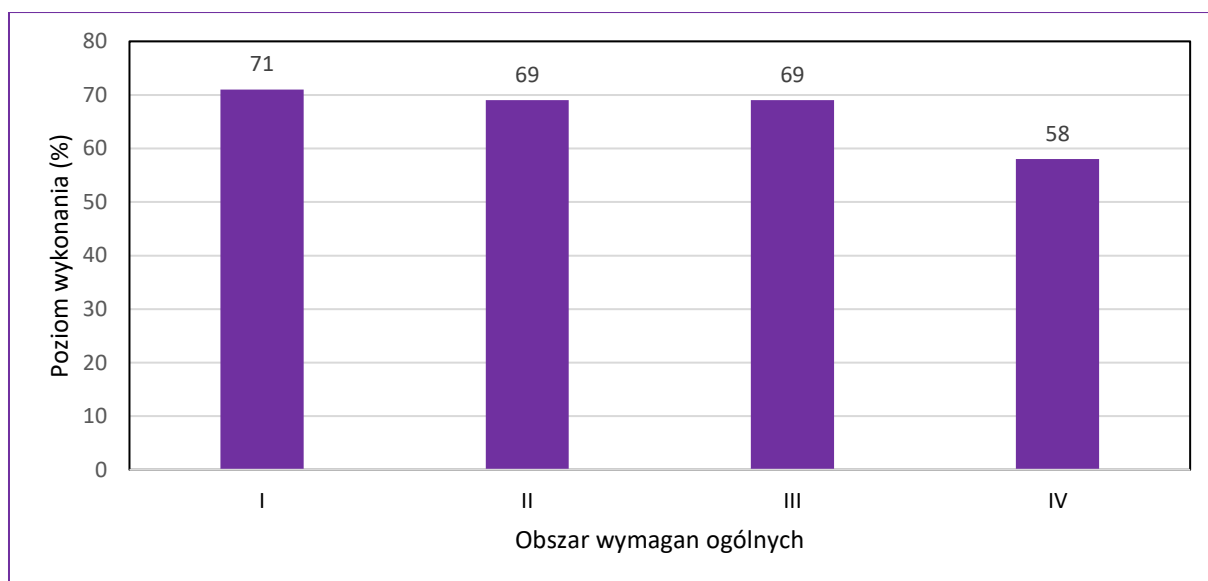
Poziom wykonania zadań

TABELA 5. POZIOM WYKONANIA ZADAŃ

Wymagania podstawy programowej			
Nr zad.	Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poziom wykonania zadania (%)
1.	I. Sprawność rachunkowa.	Zdający: I.3) stosuje własności pierwiastków dowolnego stopnia [...]; I.4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach.	71
2.	I. Sprawność rachunkowa.	Zdający: I.4) stosuje [...] prawa działań na potęgach [...].	67
3.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: I.9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na [...] logarytm ilorazu i logarytm potęgi.	80
4.	I. Sprawność rachunkowa.	Zdający: II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$; II.2) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych.	75
5.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: I.2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia [...].	37
6.	II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: III.3) rozwiązuje nierówności liniowe z jedną niewiadomą. I.6) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej.	76
7.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: III.5) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej.	65
8.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: II.4) mnoży [...] wyrażenia wymierne.	65
9.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: IV.2) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych.	37
10.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: III.4) rozwiązuje [...] nierówności kwadratowe.	68

11.	II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: V.4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane. I.6) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego [...].	69
12.1.	II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: V.9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.	65
12.2.	II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: V.11) wykorzystuje własności funkcji [...] kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych [...].	85
12.3.	II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: V.12) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji [...] $y = f(x) + b$; V.4) odczytuje z wykresu funkcji: [...] miejsca zerowe [...].	51
13.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: V.5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej; V.6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o jej wykresie lub o jej własnościach.	75
14.1.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: VI.2) oblicza początkowe wyrazy ciągów określonych rekurencyjnie.	77
14.2.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: VI.4) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny.	51
15.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: VI.7) wykorzystuje własności ciągów [...] arytmetycznych [...] do rozwiązywania zadań [...].	52
16.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: VI.6) stosuje wzór na n -ty wyraz [...] ciągu geometrycznego.	79
17.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: VII.2) korzysta z wzorów $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.	73
18.1.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: VII.1) wykorzystuje definicje funkcji [...] tangens dla kątów od 0° do 180° [...].	81

18.2.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: VII.1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus [...] dla kątów od 0° do 180° [...].	63
19.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: VIII.5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych.	82
20.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: VIII.8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów.	57
21.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: VII.3) stosuje twierdzenie cosinusów oraz wzór na pole trójkąta $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$.	56
22.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: IX.3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych.	72
23.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: IX.2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej [...], w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich, jak np. [...] równoległość do innej prostej).	81
24.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: IX.4) posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.	63
25.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: X.4) rozpoznaje [...] w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą) [...]; X.5) oblicza objętości [...] stożka [...], również z wykorzystaniem trygonometrii.	51
26.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: X.5) oblicza objętości [...] graniastosłupów [...].	66
27.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: XI.2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania [...].	73
28.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: XII.1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.	84
29.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: XII.2) oblicza średnią arytmetyczną [...].	91
30.	II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: XII.2) [...] znajduje medianę i dominantę.	70
31.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: XIII) rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.	43

WYKRES 2. POZIOM WYKONANIA ZADAŃ W OBSZARZE WYMAGAŃ OGÓLNYCH

POZIOM ROZSZERZONY

Opis arkusza egzaminu maturalnego

W roku szkolnym 2024/2025 egzamin maturalny z matematyki został przeprowadzany na podstawie wymagań podstawy programowej określonej w rozporządzeniu Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r.⁶

Arkusz egzaminacyjny z matematyki na poziomie rozszerzonym zawierał ogółem 13 zadań otwartych (ujętych w 12 grup/wiązek tematycznych). Zadania sprawdzały wiadomości oraz umiejętności ujęte w następujących obszarach wymagań ogólnych:

- II. Wykorzystanie i tworzenie informacji (1 zadanie otwarte łącznie za 2 punkty).
- III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji (5 zadań otwartych łącznie za 20 punktów).
- IV. Rozumowanie i argumentacja (7 zadań otwartych łącznie za 28 punktów).

Zdający mogli korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych na egzamin maturalny z matematyki* oraz linijki, cyrkla i kalkulatora prostego.

Dane dotyczące populacji zdających

TABELA 6. ZDAJĄCY ROZWIĄZUJĄCY ZADANIA W ARKUSZU STANDARDOWYM*

Liczba zdających (Formuła 2023)		12 990
Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym	z liceów ogólnokształcących	10 555
	z techników	2 418
	z branżowych szkół II stopnia	17
	ze szkół na wsi	202
	ze szkół w miastach do 20 tys. mieszkańców	1 429
	ze szkół w miastach od 20 tys. do 100 tys. mieszkańców	2 749
	ze szkół w miastach powyżej 100 tys. mieszkańców	8 610
	ze szkół publicznych	11 260
	ze szkół niepublicznych	1 730
	kobiety	5 603
	mężczyźni	7 387
	bez dysleksji rozwojowej	10 810
	z dysleksją rozwojową	2 180
	obywatele Ukrainy ⁷	5

* Dane w tabeli dotyczą tegorocznych absolwentów.

Z egzaminu zwolniono 32 osoby – laureatów i finalistów Olimpiady Matematycznej.

⁶ Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia (Dz.U. z 2024 r. poz. 1019).

⁷ Zdający – obywatele Ukrainy przystąpili do egzaminu maturalnego na podstawie § 3c ust. 1 rozporządzenia Ministra Edukacji i Nauki z dnia 21 marca 2022 r. w sprawie organizacji kształcenia, wychowania i opieki dzieci i młodzieży będących obywatelami Ukrainy (Dz.U. z 2023 r. poz. 2094 z późn. zm.).

TABELA 7. ZDAJĄCY ROZWIĄZUJĄCY ZADANIA W ARKUSZACH DOSTOSOWANYCH

Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach dostosowanych	z autyzmem, w tym z zespołem Aspergera	381
	słabowidzący	18
	niewidomi	0
	słabosłyszący	19
	niesłyszący	4
	z niepełnosprawnością ruchową spowodowaną mózgowym porażeniem dziecięcym	2
	z zaburzeniem widzenia barw	4
Ogółem		428

Przebieg egzaminu

TABELA 8. INFORMACJE DOTYCZĄCE PRZEBIEGU EGZAMINU

Termin egzaminu			12 maja 2025
Czas trwania egzaminu dla arkusza standardowego			180 minut
Liczba szkół			577
Liczba zespołów egzaminatorów			33
Liczba egzaminatorów weryfikatorów			94
Liczba egzaminatorów			656
Liczba obserwatorów ⁸ (§ 8 ust. 1)			43
Liczba unieważnień ⁹	w przypadku:		
	art. 44zzv pkt 1	stwierdzenia niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego	0
	art. 44zzv pkt 2	wniesienia lub korzystania przez zdającego w sali egzaminacyjnej z urządzenia telekomunikacyjnego	0
	art. 44zzv pkt 3	zakłócenia przez zdającego prawidłowego przebiegu egzaminu	0
	art. 44zzw ust. 1	stwierdzenia podczas sprawdzania pracy niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego	0
	art. 44zzy ust. 7	stwierdzenie naruszenia przepisów dotyczących przeprowadzenia egzaminu maturalnego	3
	art. 44zzy ust. 10	niemożność ustalenia wyniku (np. zaginięcie karty odpowiedzi)	0
Liczba wglądów ⁹ (art. 44zzz)			1 139

⁸ Rozporządzenie Ministra Edukacji i Nauki z dnia 1 sierpnia 2022 r. w sprawie egzaminu maturalnego (Dz.U. z 2024 r. poz. 302, z późn. zm.).

⁹ Ustawa z dnia 7 września 1991 r. o systemie oświaty (Dz.U. z 2025 r. poz. 881).

Podstawowe dane statystyczne

Wyniki zdających

WYKRES 3. ROZKŁAD WYNIKÓW ZDAJĄCYCH

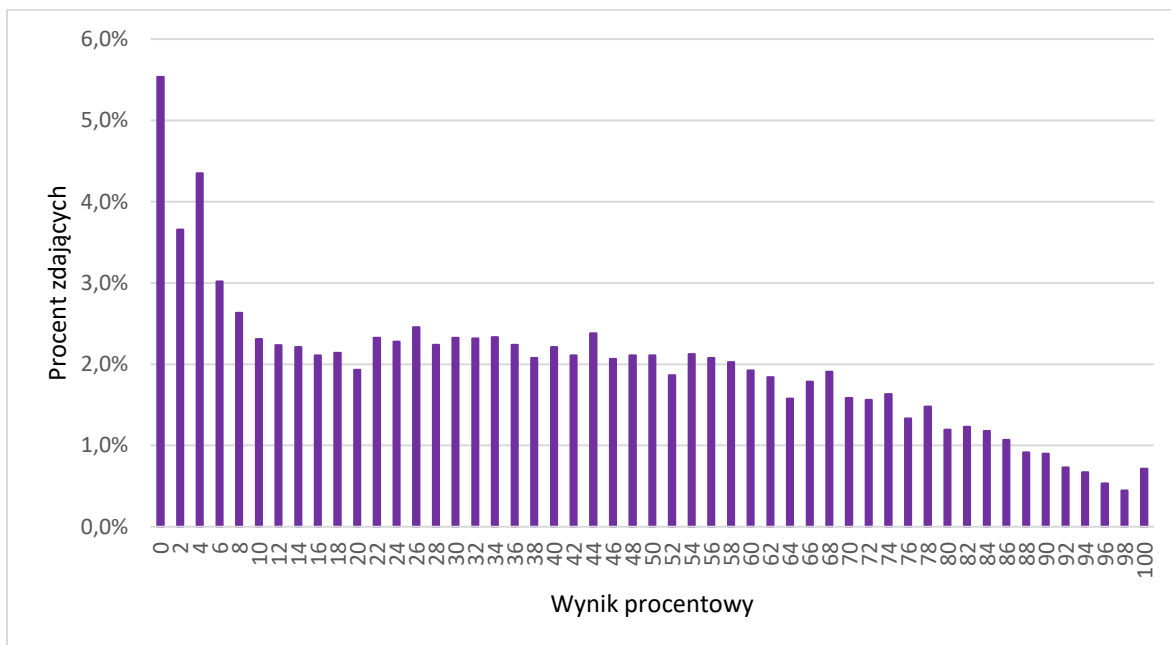


TABELA 9. WYNIKI ZDAJĄCYCH – PARAMETRY STATYSTYCZNE*

Zdający	Liczba zdających	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
Ogółem Formuła 2023	12 990	0	100	36	0	39	28
w tym:							
z liceów ogólnokształcących	10 555	0	100	44	0	44	27
z techników	2 418	0	100	10	0	18	20
z branżowych szkół II stopnia	17	0	40	0	0	3	10
obywatele Ukrainy	20	2	94	30	20	39	30

* Dane dotyczą tegorocznych absolwentów. Parametry statystyczne są podane dla grup liczących 30 lub więcej zdających.

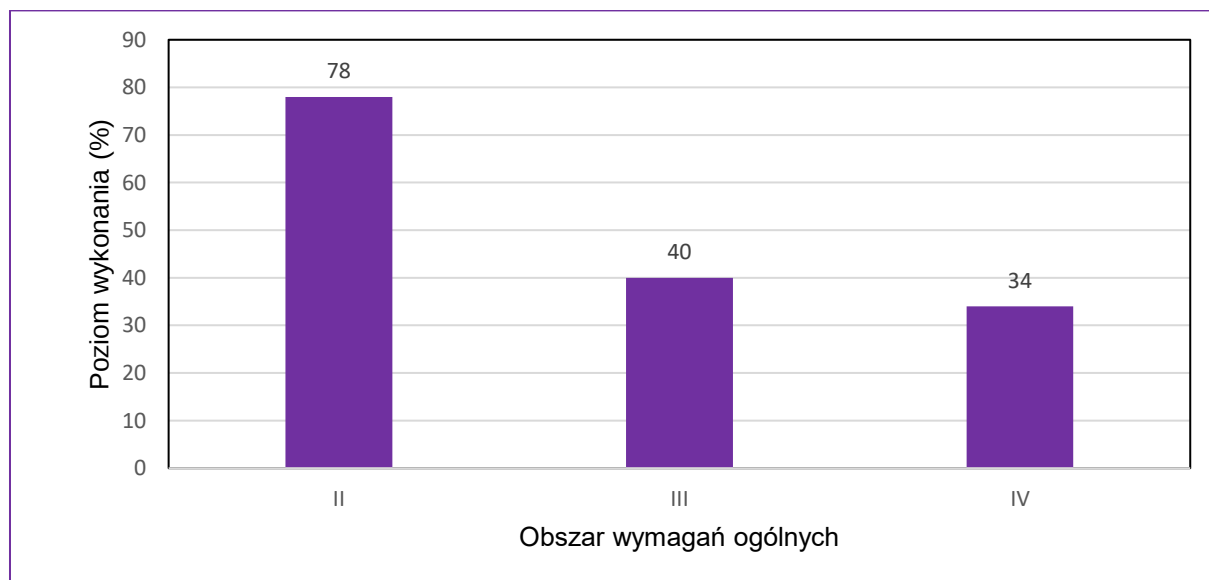
Poziom wykonania zadań

TABELA 10. POZIOM WYKONANIA ZADAŃ

Wymagania podstawy programowej			
Nr zad.	Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe <i>Gdy wymaganie dotyczy treści zakresu podstawowego szkoły ponadpodstawowej – dopisano (P).</i>	Poziom wykonania zadania (%)
1.	II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: V.14) (P) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną [...] do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.	78
2.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: II.5) korzysta ze wzorów na: [...] $(a + b)^n$ [...].	43
3.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: VII.8) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty).	24
4.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: XII.1) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe [...].	18
5.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: III.4) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną.	60
6.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: VI.2) rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.	53
7.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: VIII.11) (P) przeprowadza dowody geometryczne.	38
8.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: IX.2) znajduje punkty wspólne dwóch okręgów; IX.3) zna pojęcie wektora i oblicza jego współrzędne oraz długość, dodaje wektory i mnoży wektor przez liczbę, oba te działania wykonuje zarówno analitycznie, jak i geometrycznie.	30
9.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: VII.6) rozwiązuje równania trygonometryczne.	29
10.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: X.3) (P) rozpoznaje w [...] ostrosłupach kąty między odcinkami [...] oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów; X.5) (P) oblicza [...] pola powierzchni [...] ostrosłupów [...].	22
11.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: III.3) stosuje wzory Viète'a dla równań kwadratowych; III.5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami [...].	46

12.1.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: X.5) (P) oblicza objętości [...] stożka [...].	30
12.2.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: XIII.4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu [...]; XIII.5) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji; XIII.6) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.	47

WYKRES 4. POZIOM WYKONANIA ZADAŃ W OBSZARZE WYMAGAŃ OGÓLNYCH



KOMENTARZ

Analiza jakościowa zadań – poziom podstawowy

Arkusz egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym zawierał 25 zadań zamkniętych i 10 zadań otwartych o zróżnicowanym stopniu trudności, których rozwiązanie wymagało wykazania się wiedzą i umiejętnościami z zakresu następujących obszarów wymagań ogólnych:

- I. Sprawność rachunkowa
- II. Wykorzystanie i tworzenie informacji
- III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji
- IV. Rozumowanie i argumentacja

Poziom wykonania zadań z arkusza egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym w ww. obszarach został przedstawiony na wykresie 2. Analiza poziomu wykonania zadań w poszczególnych obszarach pozwala stwierdzić, że największą trudność sprawiły zdającym zadania wymagające przeprowadzania rozumowań i podawania argumentacji oraz zadania wymagające stosowania i tworzenia strategii (poziom wykonania 58%). Są to umiejętności opisane w IV obszarze wymagań ogólnych *Rozumowanie i argumentacja*, a sprawdzane były w 7 zadaniach, w tym: w 4 zadaniach zamkniętych oraz w 3 zadaniach otwartych.

Wyższy poziom wykonania (69%) dotyczy zadań z III obszaru wymagań *Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji*, czyli badających umiejętność stosowania obiektów matematycznych i operowania nimi, interpretowania pojęć matematycznych, dobierania i tworzenia modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. Umiejętności z tego obszaru były sprawdzane w 19 zadaniach, w tym: w 16 zadaniach zamkniętych oraz w 3 zadaniach otwartych.

Najwyższy poziom wykonania (71% i 69%) odnotowano w zadaniach badających umiejętności z zakresu I i II obszaru wymagań ogólnych. Umiejętności wykonywania obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowania praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych (I obszar wymagań ogólnych) sprawdzane były w 3 zadaniach zamkniętych. Natomiast umiejętnościami z II obszaru wymagań ogólnych, czyli interpretowaniem i operowaniem informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów czy diagramów, zdający musieli wykazać się podczas rozwiązywania 6 zadań, w tym: 2 zadań zamkniętych oraz 4 zadań otwartych.

Analizując wskaźniki poziomu wykonania poszczególnych zadań arkusza egzaminacyjnego z matematyki na poziomie podstawowym, które zostały zamieszczone w Tabeli 5., można zauważyć, że najliczniejszą grupę stanowią zadania łatwe (poziom wykonania od 70% do 89%). Takich zadań jest 17, w tym: 15 zadań zamkniętych i 1 zadanie otwarte.

Drugą grupę pod względem liczebności stanowią zadania umiarkowanie trudne (poziom wykonania od 50% do 69%). Takich zadań w arkuszu wystąpiło 15, w tym: 9 zadań zamkniętych i 6 zadań otwartych.

Trzy zadania arkusza egzaminacyjnego (otwarte) odznaczają się niskim poziomem wykonania (od 20% do 49%), przez co zakwalifikowano je do kategorii zadań trudnych.

W zestawie egzaminacyjnym z matematyki na poziomie podstawowym żadne z zadań nie było dla tegorocznych maturzystów bardzo trudne. Natomiast najwyższy poziom wykonania (z zakresu od 90% do 100%) osiągnęło jedno zadanie zamknięte (zad. 29), co świadczy o tym, że było ono bardzo łatwe dla zdających.

Zadania, z którymi zdający poradzili sobie najłaciej

Analiza wskaźników wykonania poszczególnych zadań z zestawu egzaminacyjnego z matematyki na poziomie podstawowym prowadzi do wniosku, że najtrudniejszym zadaniem (poziom wykonania 37%) dla tegorocznych maturzystów było zadanie 9. – otwarte krótkiej odpowiedzi, za którego poprawne rozwiązanie można było uzyskać 2 punkty. W tym zadaniu sprawdzane były umiejętności z III obszaru wymagań ogólnych – dobieranie/tworzenie modelu matematycznego do rozwiązania problemu praktycznego i teoretycznego.

Treść zadania 9. brzmiała:

Zarząd firmy wydzielił z budżetu kwotę 1 200 000 złotych łącznie na projekty badawcze dla dwóch zespołów: A i B. W pierwszym półroczu realizacji tych projektów oba zespoły wykorzystały łącznie 146 700 złotych – zespół A wykorzystał 13% przyznanych mu środków, a zespół B wykorzystał 11% przyznanych mu środków.

*Oblicz kwotę przyznaną zespołowi A na realizację projektu badawczego.
Zapisz obliczenia.*

Właściwa interpretacja informacji zawartych w treści zadania skutkowałą utworzeniem modelu matematycznego prowadzącego do rozwiązania problemu. W zależności od wybranego sposobu rozwiązania można było zapisać układu równań z dwiema niewiadomymi (oznaczającymi kwoty przyznane poszczególnym zespołom) lub równanie z jedną niewiadomą (oznaczającą kwotę przyznaną jednemu z zespołów), co stanowiło pierwszy etap rozwiązania. Realizując drugi etap, należało wyznaczyć rozwiązanie wcześniej zapisanych związków i podać kwotę przyznaną zespołowi A na realizację projektu badawczego.

Przykłady 1., 2. i 3. ilustrują najczęściej występujące poprawne sposoby rozwiązania zadania 9.

Przykład 1.

$$\begin{aligned}
 &1\,200\,000 \quad \begin{cases} x + y = 1\,200\,000 \rightarrow x = 1\,200\,000 - y \\ 0,13x + 0,11y = 146\,700 \end{cases} \\
 &A - x \text{ zł} \\
 &B - y \text{ zł} \\
 &13\% x + 11\% y = 146\,700 \\
 &0,13 \cdot (1\,200\,000 - y) + 0,11 \cdot y = 146\,700 \\
 &156\,000 - 0,13y + 0,11y = 146\,700 \quad /+ 0,13y - 0,11y \\
 &156\,000 = 146\,700 + 0,02y \quad /- 146\,700 \\
 &9\,300 = 0,02y \quad / \cdot 50 \\
 &465\,000 = y \\
 &x = 1\,200\,000 - 465\,000 = 735\,000
 \end{aligned}$$

Przykład 2.

$$\begin{aligned}
 x &= \text{kwota zespołu A} \\
 1200\,000 - x &= \text{kwota zespołu B} \\
 146\,700 &= 0,13x + (1200\,000 - x)0,11 \\
 146\,700 &= 0,13x + 132\,000 - 0,11x \\
 146\,700 - 132\,000 &= 0,02x \\
 \cancel{294\,700} & \\
 14\,700 &= 0,02x \\
 x &= \frac{14\,700}{0,02} \quad x = 735\,000 \text{ łącznie}
 \end{aligned}$$

Przykład 3.

$$\begin{aligned}
 x &= A & y &= B \\
 \begin{cases} x + y = 1200\,000 \Rightarrow y = 1200\,000 - x \\ 0,87x + 0,89y = 1200\,000 - 14\,6700 \end{cases} \\
 0,87x + 0,89(1200\,000 - x) &= 105\,3300 \\
 0,87x + 106\,8000 - 0,89x &= 105\,3300 \\
 -0,02x &= -14\,700 \\
 x &= 735\,000 \\
 \uparrow & \text{kwota zespołu A}
 \end{aligned}$$

Niski poziom wykonania tego zadania wskazuje na to, że zdający, pomimo podjęcia próby rozwiązania, mieli problem z poprawną interpretacją treści zadania. Część zdających, widząc w opisie problemu wartości procentowe, błędnie uznawała, że w rozwiązaniu należy wykorzystać procent składany (Przykład 4.)

Przykład 4.

$$\begin{aligned}
 146\,700 &= 1200\,000 \cdot \left(1 + \frac{13}{100}\right)^1 \\
 146\,700 &= 1200\,000 \cdot 1,13 \\
 K_N &= 1200\,000 \cdot \left(1 + \frac{13\%}{100}\right)^1 \\
 K_N &= \cancel{156\,000} \quad 15\,600
 \end{aligned}$$

Błędnie interpretowali treść zadania również ci maturzyści, którzy przyjmowali, że skoro wykorzystano kwotę 146 700 zł, to wystarczy obliczyć 13% i 11% tej kwoty, otrzymane wartości zsumować i uzyskamy szukaną kwotę (Przykład 5.).

Przykład 5.

$ \begin{array}{l} 146\,700 - 100\% \\ x - 13\% \end{array} $ $ \begin{array}{l} 146\,700 \cdot 13 = 100x \\ 1907100 = 100x \quad :100 \\ 19071 = x \end{array} $	A B	$ \begin{array}{l} 146\,700 - 100\% \\ x - 11\% \end{array} $ $ \begin{array}{l} 146\,700 \cdot 11 = 100x \\ 1613700 = 100x \quad :100 \\ 16137 = x \end{array} $
$19071 + 16137 = 35\,208 \approx 146\,700$		

Część zdających nie tylko błędnie interpretowała treść zadania, ale również wprowadzała dodatkowe założenia, które w niej nie występowały, ani z niej nie wynikały. Przykładem takiego dodatkowego warunku było założenie, że kwota 1 200 000 zł została równo podzielona między oba zespoły i wystarczy obliczyć 13% kwoty 600 000 zł, by wyznaczyć szukaną wartość (Przykład 6.). W takich rozwiązaniach informację o tym, że zespół B wykorzystał 11% przyznanej mu sumy, uznawano za zbędną i jej nie wykorzystywano.

Przykład 6.

$$1,200,000 \text{ zł}$$

$$\swarrow \quad \downarrow \quad \searrow$$

$$A \quad B$$

$$1200000 : 2 = 600,000$$

$$600,000 = 100\%$$

$$x = 73\%$$

$$600,000 \cdot 73 = 438,000$$

$$780000 = 100 \times 1.73$$

$$x = 78000$$

Odp. Zespołowi A zostało wypłacone 600.000 zł
i zgodnie 73% czyli 438.000 zł

Wśród rozwiązań pojawiały się również takie, w których zdający zapisywali poprawny układ równań, ale nie potrafili go poprawnie rozwiązać (Przykład 7. i Przykład 8.). W takich przypadkach zdający uzyskiwali 1 punkt za realizację pierwszego etapu rozwiązania.

Przykład 7.

$$a - \text{liczba zespołu A} \quad b - \text{liczba zespołu B}$$

$$1200000 = a + b \quad 1200000 - a = b$$

$$146700 = 0.13a + 0.11b$$

$$146700 = 0.13a + 132000 + 0.11a$$

$$14700 = 0.14a$$

$$105000 = a$$

Przykład 8.

Łączna kwota	1 200 000 zł	$1200\ 000 - 146\ 700 =$	
		$= 1\ 053\ 300$	zostaje
wykorzystały łącznie	146 700		
x - firma A	13% z x	0,13	1200 000
y - firma B	11% z y	0,11	
$x + y =$	1200 000		$x = 1200\ 000 - y$
$0,13 \cdot x + 0,11y =$	146 700		
$0,13(1200\ 000 - y) + 0,11y =$	146 700		
$156\ 000 - 0,13y + 0,11y =$	146 700		
$- 0,02y =$	- 9 300		
$y =$	46 5000		
$x = 1200\ 000 - 46\ 5000 =$	<u>73 500 zł</u>		
spr.			
$73\ 500 \cdot (0,13) + 46\ 5000 \cdot 0,11 =$	$9\ 550 + 51\ 150 =$	146 700	

Odp. łączna kwota przyznana zespołowi A na realizację projektu badawczego wynosiła 73 500 zł

Analiza rozwiązań zadania 9. pozwala zauważyć, że jedną z przyczyn niepowodzeń przy rozwiązywaniu tego zadania jest brak umiejętności czytania treści zadania ze zrozumieniem, poprawnej jej interpretacji oraz niski poziom opanowania umiejętności modelowania matematycznego.

Zadanie 5. (dwupunktowe, otwarte, krótkiej odpowiedzi) sprawiło zdającym nie mniejszy problem niż rozwiązanie zadania 9. Było to zadanie z IV obszaru wymagań ogólnych (*Rozumowanie i argumentacja*), które polegało na przeprowadzeniu dowodu dotyczącego podzielności liczb całkowitych. W rozwiązaniu tego zadania maturzyści mieli wykazać się umiejętnością podawania matematycznych argumentów uzasadniających poprawność rozumowania.

Poziom wykonania (37%) zadania 5. wskazuje na to, że było to zadanie trudne dla przystępujących do egzaminu maturalnego w 2025 roku.

By uzyskać maksymalną liczbę punktów za rozwiązanie zadania 5. należało wykazać, że dla każdej nieparzystej liczby naturalnej n liczba $3n^2 + 2n + 7$ jest podzielna przez 4. Rozwiązując zadanie 5., zdający stosowali różne podejście do problemu. Jedni, wykorzystując fakt, że liczba n jest nieparzystą liczbą naturalną, zapisywali ją w postaci $2l + 1$, gdzie $l \in \mathbb{Z}$ i $l \geq 0$. Następnie przekształcali liczbę $3n^2 + 2n + 7$ do postaci $4(3l^2 + 4l + 3)$, w której suma $3l^2 + 4l + 3$ jest liczbą całkowitą, co implikowało wniosek, że iloczyn $4(3l^2 + 4l + 3)$ jest podzielny przez 4 dla każdej liczby nieparzystej n . Ten sposób rozwiązania zilustrowano Przykładem 9.

Przykład 9.

$$\begin{aligned}
 m &= 2k+1 \\
 3m^2 + 2m + 7 &= \\
 &= 3 \cdot (2k+1)^2 + 2(2k+1) + 7 = \\
 &= 3 \cdot (2k+1)(2k+1) + 4k + 2 + 7 = \\
 &= 3 \cdot (4k^2 + 2k + 2k + 1) + 4k + 9 = \\
 &= 12k^2 + 6k + 6k + 3 + 4k + 9 = \\
 &= 12k^2 + 16k + 12 = \\
 &= 4(3k^2 + 4k + 3) = 4m \\
 &\quad \text{c. całkowite } m
 \end{aligned}$$

$3m^2 + 2m + 7 = 4m$
 więc liczba $3m^2 + 2m + 7$ jest
 podzielna przez 4.

Inny pomysł na wykazanie postawionej w zadaniu 5. tezy mieli ci maturzyści, którzy zapisywali liczbę $3n^2 + 2n + 7$ w postaci sumy algebraicznej liczb i uzasadniali podzielność składników sumy przez 4 (Przykład 10. i Przykład 11.).

Przykład 10.

$$3n^2 + 2n + 7 = n^2 + 2n + 1 + 2n^2 + 6 = (n+1)^2 + 2(n^2+3)$$

Liczbę $3n^2 + 2n + 7$ można rozłożyć na sumę kwadratu liczby parzystej $(n+1)$ oraz ~~liczby~~ podwójonej liczby (n^2+3) , która też jest parzysta. Kwadrat liczby parzystej zawsze jest podzielny przez 4, więc liczba $(n+1)^2$ jest podzielna przez 4. Liczba parzysta pomnożona razy dwa też zawsze jest wielokrotnością czwórki, więc liczba $2 \cdot (n^2+3)$ jest podzielna przez 4.

Suma dwóch liczb podzielnych przez 4 jest podzielna przez 4, więc liczba $(n+1)^2 + 2(n^2+3)$ jest podzielna przez 4.

Przykład 11.

$$\begin{aligned}
 3n^2 + 2n + 7 &= 4(n^2 + n + 1) - n^2 - 2n + 3 = \\
 &= 4(n^2 + n + 1) - (n^2 + 2n - 3) = \\
 &= 4(n^2 + n + 1) - (n+3)(n-1) \quad \Delta = 4 + 12 = 16 \\
 &\quad n_1 = \frac{-2-4}{2} = -3 \\
 &\quad n_2 = \frac{-2+4}{2} = 1
 \end{aligned}$$

JEŻELI n – nieparzyste, to zarówno $n+3$ jak i $n-1$ są parzyste, czyli iloczyn tych liczb jest podzielny przez 4.

Stosunkowo liczną grupę wśród zdających stanowili ci, którzy pomimo początkowo dobrego pomysłu na rozwiązanie, nie osiągnęli w nim sukcesu – popełniali błędy, np. nieprawidłowo stosowali wzory skróconego mnożenia (Przykład 12. i Przykład 13.), błędnie wykonywali redukcję wyrazów podobnych w otrzymanych wyrażeniach (Przykład 14.), nieprawidłowo wyłączali wspólny czynnik przed nawias (Przykład 15. i Przykład 16.). W takich sytuacjach, jeśli doprowadzili rozwiązanie do końca i uzyskali całkowitą wielokrotność liczby 4 postaci $4 \cdot (a \cdot l^2 + b \cdot l + c)$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{Z}$ i $a \neq 0$, mogli otrzymać 1 punkt za całe rozwiązanie.

Przykład 12.

$$\begin{aligned}
 Z: n &= 2k + 1 \quad k - \text{liczba całkowita} \\
 T: & (3n^2 + 2n + 7) \bmod 4 = 0 \\
 D: & \\
 & 3(2k+1)^2 + 2(2k+1) + 7 = 3(4k^2 + 8k + 1) + 4k + 2 + 7 = \\
 & = 12k^2 + 24k + 4k + 12 = 12k^2 + 28k + 12 = 4(3k^2 + 7k + 3)
 \end{aligned}$$

liczba dzieli się bez reszty
przez 4 co należało
wykazać

Przykład 13.

$$\begin{aligned}
 & 3(2n+1)^2 + 2(2n+1) + 7 \\
 & 3(4n^2 + 1) + 4n + 2 + 7 \\
 & 12n^2 + 3 + 4n + 9 \\
 & 12n^2 + 12 + 4n \\
 & 4(3n^2 + 3 + n) \\
 & \uparrow \\
 & \text{liczba jest } \cancel{\text{nie}} \text{ podzielna przez 4}
 \end{aligned}$$

Przykład 14.

$$\begin{aligned}
 & 2k - 1 \quad - \text{ l. nieparzysta} \\
 & 3(2k-1)^2 + 2(2k-1) + 7 = 3(4k^2 - 4k + 1) + 4k - 2 + 7 = \\
 & = 12k^2 - 12k + 3 + 4k - 2 + 7 = 12k^2 - 8k + 8 = \\
 & = 4(3k^2 - 2k + 2) \\
 & 3k^2 - 2k + 2 \text{ jest liczbą całkowitą, bo } k \text{ jest liczbą} \\
 & \text{całkowitą, więc } 3k^2 + 2k + 7 \text{ jest podzielne przez 4,} \\
 & \text{bo możemy } \cancel{\text{z}} \text{ zapisać jako } 4 \cdot (3k^2 - 2k + 2) = 4 \cdot L \\
 & L - \text{ liczba całkowita}
 \end{aligned}$$

Przykład 15.

liczba nieparzysta $n = 2k + 1$

$$3(2k+1)^2 + 2(2k+1) + 7 = 3(4k^2 + 4k + 1) + 4k + 2 + 7 =$$

$$= 12k^2 + 12k + 3 + 4k + 9 = 12k^2 + 16k + 12 = 4(3k^2 + 4k + 3)$$

jeden z czynników jest liczbą podzielną przez 4, zatem $3n^2 + 2n + 7$ jest podzielna przez 4 c.n.d.

Przykład 16.

$\mathbb{Z}: n \in \mathbb{R} \quad n = 2k + 1$

$T: 3n^2 + 2n + 7 = 4k$

$D: 3(2k+1)^2 + 2(2k+1) + 7 =$

$$= 3 \cdot (4k^2 + 4k + 1) + 4k + 2 + 7 =$$

$$= 12k^2 + 12k + 3 + 4k + 2 + 7 =$$

$$= 12k^2 + 16k + 12 =$$

$$= 4(3k^2 + 4k + 3).$$

zakładając, że $n = 2k + 1$ to liczba nieparzysta to $3n^2 + 2n + 7$ jest podzielne przez 4 c.n.d.

Część zdających, pomimo przekształcenia wyrażenia $3n^2 + 2n + 7$ do postaci, która była wystarczająca do zakończenia dowodu, albo nie była świadoma jego zakończenia, albo popełniała błędy w końcowym etapie rozwiązania, tj. w uzasadnieniu podzielności liczby $3n^2 + 2n + 7$ przez 4 (Przykład 17.)

Przykład 17. $2k$ – liczba parzysta $2k+1$ – liczba nieparzysta

$$3 \cdot (2k+1)^2 + 2 \cdot (2k+1) + 7$$

$$3 \cdot (4k^2 + 2 \cdot 2k \cdot 1 + 1^2) + 4k + 2 + 7$$

$$3 \cdot (4k^2 + 4k + 1) + 4k + 9$$

$$12k^2 + 12k + 3 + 4k + 9$$

$$12k^2 + 16k + 12$$

$$4(3k^2 + 4k + 3)$$

liczba podzielna przez 4

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 16 - 12 \cdot 3 = 16 - 36 = -20$$

liczba $3k^2 + 4k + 3$ jest podzielna przez 4,
ponieważ iloczyn dwóch kolejnych liczb
jest parzysty jeśli jedna z tych liczb
jest parzysta

Niektórzy zdający obierali błędną metodę rozwiązania zadania, polegającą na sprawdzeniu prawdziwości tezy tylko dla wybranych wartości n (Przykład 18.).

Przykład 18.

$n=3$

$$3n^2 + 2n + 7$$

$$3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 7 = 3 \cdot 9 + 6 + 7 = 27 + 13 = 40 \quad 40 : 4 = 10$$

$n=5$

$$3n^2 + 2n + 7$$

$$3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 + 7 = 3 \cdot 25 + 10 + 7 = 145 \quad 145 : 4 = 36,25$$

$n=7$

$$3n^2 + 2n + 7$$

$$3 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7 + 7 = 3 \cdot 49 + 14 + 7 = 147 + 21 = 168 \quad 168 : 4 = 42$$

~~Dot~~

$n=9$

$$3n^2 + 2n + 7$$

$$3 \cdot 9^2 + 2 \cdot 9 + 7 = 3 \cdot 81 + 18 + 7 = 243 + 25 = 268 \quad 268 : 4 = 67$$

Odp: Dla każdej nieparzystej liczby naturalnej n liczba $3n^2 + 2n + 7$ jest podzielna przez 4.

Wśród zadań trudnych dla tegorocznych maturzystów znalazło się również zadanie otwarte rozszerzonej odpowiedzi – zadanie 31. (poziom wykonania 43%). Zadanie to badało

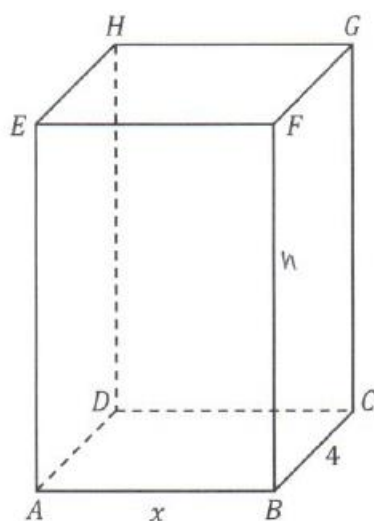
umiejętność dobierania i tworzenia modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych z zakresu wykorzystania i interpretowania reprezentacji (III obszar wymagań ogólnych).

W zadaniu 31. zdający mieli wykazać się umiejętnością rozwiązywania zadania optymalizacyjnego, dotyczącego problemu teoretycznego, który da się opisać funkcją kwadratową. Postawiony problem dotyczył rodziny prostopadłościanów $ABCDEFGH$, w których krawędź podstawy BC ma długość 4 oraz suma długości wszystkich krawędzi wychodzących z wierzchołka B jest równa 15. Należało wyznaczyć wzór i dziedzinę funkcji P pola powierzchni całkowitej takiego prostopadłościanu w zależności od długości x krawędzi AB oraz obliczyć długość x krawędzi AB tego z rozważanych prostopadłościanów, którego pole powierzchni całkowitej jest największe. Elementem pomocniczym w zadaniu był przykładowy rysunek takiego prostopadłościanu z opisanymi krawędziami.

Aby rozwiązać zadanie 31. należało zbudować model matematyczny sytuacji opisanej w zadaniu, aby następnie zbadać własności tego modelu. Wyznaczenie poprawnego wzoru funkcji opisującej pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu umożliwiło obliczenie argumentu, dla którego funkcja kwadratowa (funkcja pola) przyjmuje największą wartość. Wyznaczenie wzoru funkcji P zmiennej x , określającej pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu, wymagało wykorzystania zależności pomiędzy długościami trzech krawędzi wychodzących z wierzchołka B określonej w treści zadania ($x + 4 + |BF| = 15$). Ustalenie poprawnej zależności między tymi krawędziami prowadziło dalej do wyznaczenia długości krawędzi BF (wysokości prostopadłościanu) w zależności od długości krawędzi AB (czyli zmiennej x) a w konsekwencji – do wyznaczenia wzoru na pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jako funkcji zmiennej x i określenia jej dziedziny. Następnie wystarczyło zauważyć, że wykresem funkcji P był fragment paraboli skierowanej ramionami do dołu, obliczyć pierwszą współrzędną wierzchołka tej paraboli i stwierdzić, że należy ona do dziedziny funkcji P .

Część rozwiązujących to zadanie maturzystów poprawnie interpretowała treść zadania i prawidłowo budowała model – wyznaczała właściwy wzór funkcji i jej dziedzinę, a następnie wyznaczała długość x krawędzi AB prostopadłościanu, dla której pole powierzchni całkowitej bryły jest największe (Przykład 19.).

Przykład 19.



$$h = |BF|$$

$$x + h + 4 = 15$$

$$h = 11 - x$$

$$P_c = 2(4x + 4h + hx)$$

$$P(x) = 2(4x + 4(11-x) + (11-x)x) = 2(4x + 44 - 4x + 11x - x^2)$$

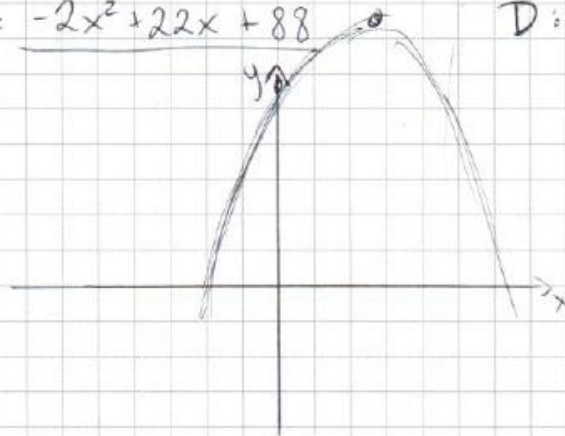
$$= -2x^2 + 22x + 88$$

$$D: x > 0$$

$$h > 0$$

$$11 - x > 0 \Rightarrow x < 11$$

$$D: x \in (0, 11)$$



← funkcja $P(x)$ ma ramiona skierowane w dół ($a < 0$), więc największą wartość osiąga w swoim wierzchołku.

$$W = (p, q)$$

$$p = \frac{-b}{2a}$$

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 22 \\ c = 88 \end{cases}$$

$$f(x) = -2x^2 + 22x + 88$$

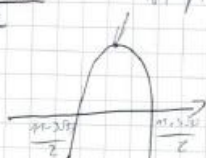
czyli $p = \frac{-22}{-4} = \frac{11}{2} < 11$ — mieści się w dziedzinie

dla $x = \frac{11}{2}$ $P(x)$ osiąga największą wartość

Niektórzy rozwiązujący zadanie 31. dodatkowo – poza wymaganymi elementami określonymi w treści zadania – obliczali jeszcze np. wartość największą funkcji P (Przykład 20.).

Przykład 20.

$$\begin{aligned}
 x > 0 \quad h > 0 \quad 11-x > 0 \\
 x+h+4 &= 15 \\
 x+h &= 11 \\
 h &= 11-x \\
 11 > x \\
 x &\in (0, 11) \\
 \text{Dziedzina funkcji } P(x): \\
 D_x &\in (0, 11) \\
 P_c &= 2 \cdot 4 \cdot x + 2 \cdot x \cdot h + 2 \cdot 4 \cdot h \\
 P(x) &= 8x + 2x(11-x) + 8(11-x) \\
 P(x) &= 8x + 22x - 2x^2 + 88 - 8x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(x) &= -2x^2 + 22x + 88 \\
 P(x) &= -2(x^2 - 11x - 44) \\
 \Delta &= 121 + 4 \cdot 44 = 297 \quad \sqrt{\Delta} = 3\sqrt{33} \\
 x_1 &= \frac{11 - 3\sqrt{33}}{2} \quad x_2 = \frac{11 + 3\sqrt{33}}{2} \quad W = (p, q) \\
 P(x) &= -2\left(x - \frac{11 - 3\sqrt{33}}{2}\right)\left(x - \frac{11 + 3\sqrt{33}}{2}\right) \\
 P(x)_{\max} &= q, \text{ więc } x_{\max} = p \\
 p &= \frac{\frac{11 - 3\sqrt{33}}{2} + \frac{11 + 3\sqrt{33}}{2}}{2} = \frac{11 - 3\sqrt{33} + 11 + 3\sqrt{33}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \\
 &= \frac{22}{4} = 5,5
 \end{aligned}$$


$$\begin{aligned}
 P(5,5) &= -2 \cdot (5,5)^2 - 11 \cdot 5,5 - 44 = \\
 &= -2(30,25 - 60,5 - 44) = 148,5 \text{ [jednostek]}
 \end{aligned}$$

Odp. Wartość największą funkcji $P(x) = -2x^2 + 22x + 88$

Dziedzina funkcji $P(x)$ to $x \in (0, 11)$

Pole powierzchni całkowitej jest największe dla x równego 5,5. Pole to wynosi 148,5 jednostek kwadratowych.

Do obowiązkowego egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym przystępowali także ci zdający, którzy wybrali matematykę jako przedmiot dodatkowy na poziomie rozszerzonym. Niektórzy z nich rozwiązywali zadanie 31. z wykorzystaniem elementów rachunku różniczkowego (Przykład 21. i Przykład 22.).

Przykład 21.

$$\begin{aligned} x+y+4 &= 15 \\ x+y &= 11 \\ y &= 11-x \end{aligned}$$

Wstępne założenia
 Długość $y > 0$
 $x > 0$
 $11-x > 0$
 $11 > x$

$$P(x) = 2(4x) + 2(4y) + 2xy =$$

$$= 8x + 8y + 2xy = 8x + 8(11-x) +$$

$$+ 2x(11-x) =$$

$$= 8x + 88 - 8x + 22x - 2x^2 =$$

$$= -2x^2 + 22x + 88$$

$$P'(x) = -4x + 22$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow -4x + 22 = 0$$

$$4x = 22$$

$$x = 5,5$$

x	(0; 5,5)	5,5	(5,5; 11)
$P'(x)$	+	0	-
$P(x)$	↗	↘	↘

Odp: Wzrost funkcji $P(x) = -2x^2 + 22x + 88$
 określonej na $x \in (0; 11)$

x osiąga dla którego
 pole powierzchni całkowitej
 jest największe to 5,5

Przykład 22.

$$|AE| = |BF| = |GC| = |HD| = y$$

$$x + y + 4 = 15 \Rightarrow y = 11 - x$$

$$P(x) = 2 \cdot x \cdot 4 + 2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot y \cdot 4$$

$$P(x) = 8x + 2x(11-x) + 8(11-x)$$

$$P(x) = 8x + 22x - 2x^2 + 88 - 8x$$

$$P(x) = -2x^2 + 22x + 88 \leftarrow \text{wzór funkcji } P$$

Dziedzina funkcji P :

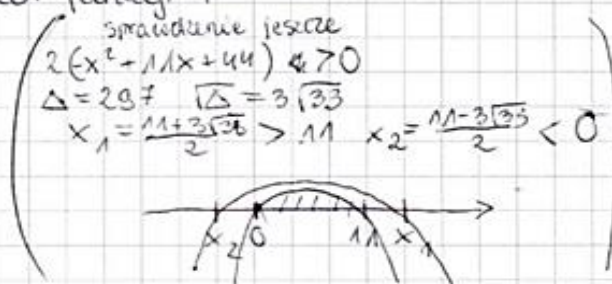
$$x > 0$$

$$y > 0$$

$$11 - x > 0$$

$$11 > x$$

$$x \in (0, 11)$$



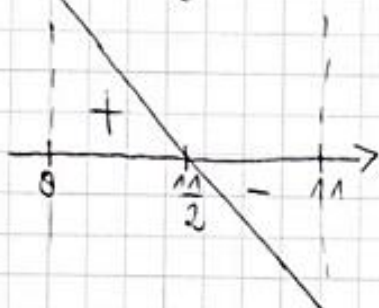
$$P'(x) = -4x + 22$$

$$P'(x) = -2(2x - 11)$$

$$2x - 11 = 0$$

$$2x = 11$$

$$x = \frac{11}{2}$$



$$P'(x) = \begin{cases} > 0 & \text{dla } x \in (0, \frac{11}{2}) \\ < 0 & \text{dla } x \in (\frac{11}{2}, 11) \end{cases}$$

$$P(x) = \begin{cases} \text{rosnąca} & \text{dla } x \in (0, \frac{11}{2}) \\ \text{malejąca} & \text{dla } x \in (\frac{11}{2}, 11) \end{cases}$$

funkcja $P(x)$ osiąga maksimum dla $x = \frac{11}{2}$

$|AB| = x = \frac{11}{2} \leftarrow$ dla tej długości pole powierzchni największe

Niski poziom wykonania tego zadania (43%) może wynikać z faktu, że część maturzystów miała problem z poprawną analizą treści zadania i podanych w niej warunków, a podejmując próbę rozwiązania zadania, stosowali model matematyczny najbardziej im znany, odnoszący się do prostopadłościanu o podstawie kwadratu. Rozwiązanie z tego rodzaju błędem obrazuje Przykład 23.

Przykład 23.

$x, y > 0$ $y \in (0, 11)$ $x \in (0, 11)$

$x + y + z = 15$
 $x + y = 11$
 $y = 11 - x$

$P(x) = 4xy + 8x$
 ~~$P(x) = 4xy + 2 \cdot 4xy$~~
 $P(x) = 4x(11 - x) + 8x$
 $P(x) = 44x - 4x^2 + 8x$
 $P(x) = -4x^2 + 52x$

$y = 11 - 6,5$
 $y = 4,5$

$P = -\frac{1}{2a}$
 $P = \frac{-52}{-8} = \frac{13}{2}$

Odp. Pole pow. całkowitej jest najw. dla $x = 6,5$

Część zdających zamiast pola powierzchni całkowitej prostopadłościanu rozpatrywała tylko jego połowę bez jakiegokolwiek komentarza (Przykład 24. i Przykład 25.).

Przykład 24.

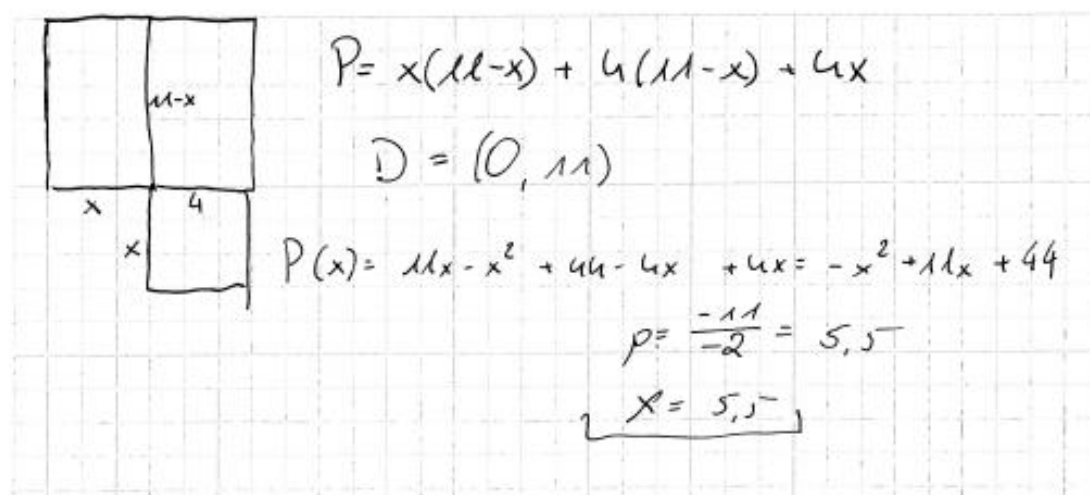
$D: x > 0$
 $y > 0$

$x + y + 4 = 15$
 $x + y = 15 - 4$
 $x + y = 11$
 $y = 11 - x$
 $y = 11 - 5\frac{1}{2}$
 $y = 5\frac{1}{2}$

$11 - x > 0$
 $-x > -11$
 $-x > -11 \cdot (-1)$
 $x < 11$

$P(x) = 4x + xy + 4y$
 ~~$P(x) = 4x + x(11 - x) + 4(11 - x)$~~
 $P(x) = 4x + 11x + x^2 + 44 - 4x$
 $P(x) = x^2 + 11x + 44$
 $P = \frac{-11}{2} = -\frac{11}{2} = 5\frac{1}{2}$

Przykład 25.



$$P = x(11-x) + 4(11-x) + 4x + 16$$

$$D = (0, 11)$$

$$P(x) = 11x - x^2 + 44 - 4x + 4x + 16 = -x^2 + 11x + 44$$

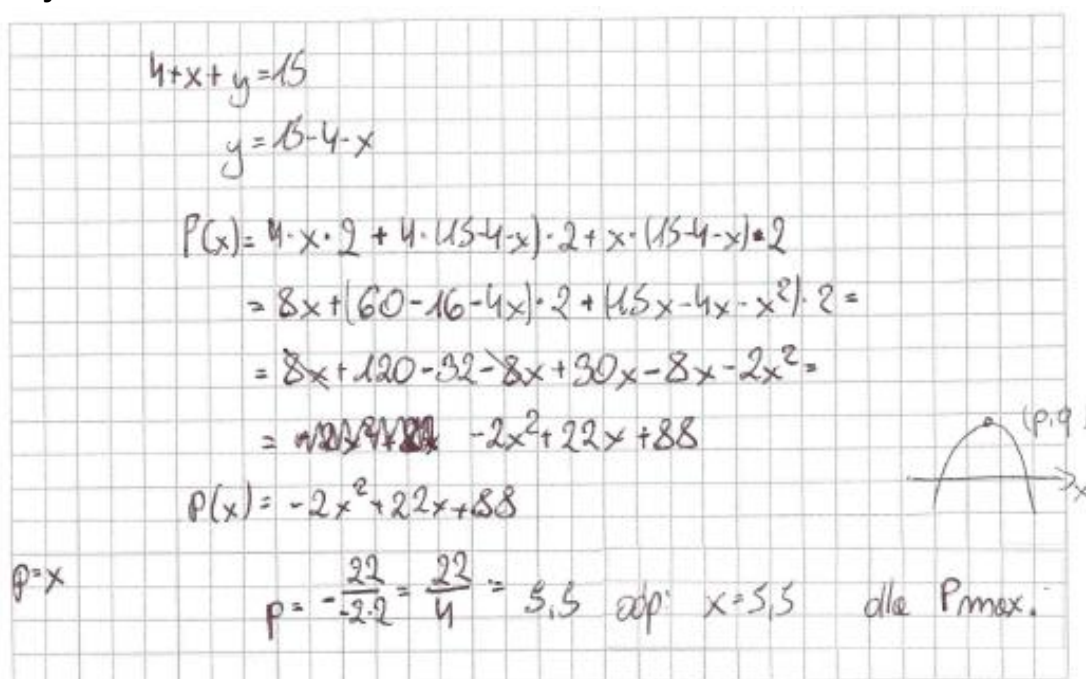
$$p = \frac{-11}{-2} = 5,5$$

$$X = 5,5$$

Rozwiązujący zadanie 31. nie ustrzegli się również innego rodzaju błędów, które wykluczały uzyskanie maksymalnej liczby (4) punktów za rozwiązanie tego zadania.

Niepełną punktację otrzymali zdający, którzy nie wypełnili wszystkich elementów polecenia, np. nie wyznaczyli dziedziny funkcji $P(x)$ – obiektu niezbędnego dla skonstruowania funkcji (Przykład 26.).

Przykład 26.



$$4+x+y=15$$

$$y=15-4-x$$

$$P(x) = 4 \cdot x \cdot 2 + 4 \cdot (15-4-x) \cdot 2 + x \cdot (15-4-x) \cdot 2$$

$$= 8x + (60-16-4x) \cdot 2 + (15x-4x-x^2) \cdot 2 =$$

$$= 8x + 120 - 32 - 8x + 30x - 8x - 2x^2 =$$

$$= -2x^2 + 22x + 88$$

$$P(x) = -2x^2 + 22x + 88$$

$$p = x$$

$$p = \frac{-22}{-2} = \frac{22}{2} = 11 \text{ odp. } x=5,5 \text{ dla } P_{\max.}$$

Niektórym zdającym w poprawnym rozwiązaniu zadania przeszkodził brak podstawowych umiejętności matematycznych niezbędnych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych (Przykład 27.) czy wyznaczaniu dziedziny funkcji (Przykład 28.).

Przykład 27.

$$\begin{aligned}
 x+h+4 &= 15 & P(x) &= 2(x \cdot 4) + 4(x \cdot h \cdot 4) \\
 x+h &= 11 & &= 2(x \cdot 4) + 4((11-x) \cdot 4) \\
 x &= 11-h & &= 2x+8+4(44-4x) \\
 h &= 11-x & &= 2x+8+176-16x \\
 & & &= -14x+184
 \end{aligned}$$

①

$$\begin{aligned}
 P(x) &= 2(x \cdot 4) + 2(h \cdot 4) + 2(x \cdot h) \\
 P(x) &= 2(x \cdot 4) + 2((11-x) \cdot 4) + 2(x \cdot (11-x)) \\
 P(x) &= 2x+8+2(44-4x)+2(11x-x^2) \\
 P(x) &= 2x+8+88-8x+22x-2x^2 \\
 P(x) &= -2x^2+16x+96
 \end{aligned}$$

$$P(x) = -2x^2 + 16x + 96 \quad / : 2$$

$$PC(x) = -x^2 + 8x + 48$$

② II: $\begin{cases} x+h=11 \\ h=11-x \\ x+h+4=15 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 x &> 0 \\
 11-x &> 0 \\
 11 > x
 \end{aligned}$$

$$x + (11-x) + 4 = 15$$

$$II: x \in (0; 11)$$

③

P_{max} :

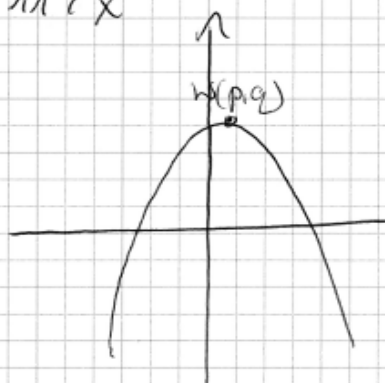
$$p = \frac{-b}{2a}$$

$$p = \frac{-8}{-2} = 4$$

$$x = p$$

$$x = 4$$

$$x \in II$$



$$\text{Spr. } 4+7+4=15$$

④

Wykres funkcji $P(x)$ jest zwrócony ramieniem w dół, a więc największy wartość pole osiągnie w wierzchołku dla $x = p$, czyli $x = 4$.

Przykład 28.

$$\begin{aligned}
 x + y + y &= 15 \\
 P(x) &= 2(4x + 4y + cy) \\
 8x + 16y &= P_c \\
 2 \cdot 4x + 2 \cdot c \cdot y + 2 \cdot 4y &= P_c \\
 8x + 2(x \cdot y) + 8y &= P_c \\
 8x + 2(x \cdot (9 - x)) + 8 \cdot (9 - x) \\
 8x + 2(9x - x^2) + 72 - 8x \\
 8x + 18x - 2x^2 + 72 - 8x \\
 P(x) &= -2x^2 + 18x + 72 \\
 P &= \frac{-18}{-4} \\
 P &= 4,5 \in D \\
 \text{Pole powierzchni całkowitej będzie największe dla } x &= 4,5
 \end{aligned}$$

Pojawiły się również rozwiązania, w których zdający jedynie obliczali wartość pola dla wybranych wartości x i na tej podstawie wskazywali największą wartość pola (Przykład 29.).

Przykład 29.

$$\begin{aligned}
 15 - 4 &= x + 11 \\
 c &= 11 - x \\
 D: x &\geq 0 \\
 x &\leq 11 \\
 P(x) &= 2(4x + 4c + cx) \\
 P(x) &= 2(4x + 4(11 - x) + 11x - x^2) \\
 P(x) &= 2(-x^2 + 11x + 44) \\
 P(x) &= -2x^2 + 22x + 88
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(1) &= -2 + 22 + 88 = 108 \\
 P(2) &= -8 + 44 + 88 = 124 \\
 P(3) &= -18 + 66 + 88 = 136 \\
 P(4) &= -32 + 88 + 88 = 144 \\
 P(5) &= -50 + 110 + 88 = 148 \\
 P(6) &= -72 + 132 + 88 = 148 \\
 P(7) &= -98 + 154 + 88 = 144 \\
 P(8) &= -128 + 176 + 88 = 136 \\
 P(9) &= -162 + 198 + 88 = 124 \\
 P(10) &= -200 + 200 + 88 = 108
 \end{aligned}$$

Odp. Pole powierzchni wielokątnej osiąga największą wartość dla $n=5$ i 6 .

Duża część zdających, która podjęła próby rozwiązania zadania, albo poprzestawała na zapisaniu warunku $x + 4 + |BF| = 15$ (Przykład 30.), albo w dalszej części swojego rozwiązania podejmowała nieudane próby wyznaczenia dziedziny lub zapisania wzoru funkcji pola (Przykład 31. i Przykład 32.).

Przykład 30.

$$\begin{aligned}
 P_x &= P_{pc} \rightarrow P(x) = 2(a_0b + b_0c + c_0a) \\
 x + 4 + c &= 15
 \end{aligned}$$

Przykład 31.

$$\begin{array}{l}
 \text{Zadanie 31} \\
 x = 4 \\
 \text{Zadanie 31} \\
 x + 15b_k \\
 x + 15b_k \\
 x > 0 \quad L > 0 \\
 b > 0 \\
 \boxed{w = 2n \quad k = 3n \quad s = n + 2} \\
 x + b + L = 15 \\
 x + 4 + L = 15 \\
 x + L = 11
 \end{array}$$

Przykład 32.

$$\begin{array}{l}
 u = 4 \\
 x + u + H = 15 \\
 x + 4 + H = 15 \quad / -4 \\
 x + H = 11 \\
 x = 11 - H \\
 P_c = 2(u + b + c + u) \\
 P_c = 2(x + 4 + u) \\
 P_p = 4x \quad \cancel{P_p = 8} \quad P_p = 4x \\
 P_b = \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 11 \quad \cancel{P_b = 16} \quad P_b = 4H
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 |cal| = x^2 + 4^2 = x^2 + 16 \\
 p = -\frac{1}{2} \quad p = x \\
 2(x + 4 + x^2 + 16) = 0 \\
 2x^2 + 8 + 2x^2 + 32 = 0 \\
 2x^2 + 2x + 40 = 0 \\
 x^2 + x + 20 = 0 \\
 x + H = 11 \quad x \in R \\
 -\frac{1}{2} + H = 11 \quad / + \frac{1}{2} \\
 H = 11 \frac{1}{2} \quad x < 11
 \end{array}$$

Zadania, z którymi zdający poradzili sobie najlepiej

Spośród umiejętności sprawdzanych poprzez zadania tworzące arkusz obowiązkowego egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym w maju 2025 roku maturzyści bardzo dobrze opanowali:

- obliczanie średniej arytmetycznej
- obliczanie prawdopodobieństwa w modelu klasycznym
- wykorzystanie własności funkcji kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych
- wykorzystanie definicji funkcji tangens dla kątów od 0° do 180°
- zastosowanie własności kątów wpisanych i środkowych.

Umiejętności te były badane w zadaniach zamkniętych, jedno- lub dwuczynnościowych. Aby je rozwiązać wystarczyło znać podstawowe pojęcia matematyczne czy też własności rozważanych obiektów, zrozumieć prosty tekst matematyczny, wykonać elementarne obliczenia lub odczytać dane z rysunków i diagramów, czyli wykazać się umiejętnościami stosowania pojęć oraz wykorzystania elementarnych własności obiektów matematycznych w sytuacjach typowych.

Najwyższy poziom wykonania wśród zadań arkusza maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym odnotowano dla zadania 29. Było to zadanie zamknięte, w którym należało wykorzystać definicję średniej arytmetycznej do wyznaczenia sumy dwóch liczb.

Zdecydowana większość zdających poradziła sobie z poprawnym rozwiązaniem tego zadania (poziom wykonania 91%).

Nieco słabiej (poziom wykonania 84%) maturzyści poradzili sobie z zadaniem 28. To zadanie zamknięte wymagało zastosowania klasycznej definicji prawdopodobieństwa. W zadaniu opisane było doświadczenie polegające na dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry, która na każdej ścianie ma inną liczbę oczek – od jednego do sześciu oczek. Aby wskazać poprawną odpowiedź, należało obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia A , polegającego na tym, że suma liczb wyrzuconych oczek będzie równa 11.

Podobny poziom wykonania (85%) odnotowano dla zadania 12.2., w którym należało wskazać równanie osi symetrii wykresu funkcji kwadratowej.

Niewiele niższy poziom wykonania (81% i 82%) odnotowano dla zadań 18.1. i 19.

W pierwszym z nich zdający mieli obliczyć tangens kąta ostrego, który powstał w trójkącie prostokątnym po opuszczeniu środkowej na jedną z przyprostokątnych tego trójkąta.

Elementem pomocniczym w tym zadaniu był rysunek trójkąta prostokątnego z wszystkimi oznaczeniami.

Natomiast w rozwiązaniu drugiego z wymienionych zadań maturzyści musieli wykorzystać związek między miarą kąta wpisanego i kąta środkowego (opartych na tym samym łuku okręgu) do obliczenia miary kąta ostrego w trójkącie równoramiennym, którego jednym z kątów był kąt środkowy. Do zadania dołączony był rysunek, dzięki któremu obliczenie szukanej miary kąta okazało się dla zdających stosunkowo łatwą czynnością.

Wśród zadań otwartych najłatwiejszym dla tegorocznych maturzystów było zadanie 30. z luką (poziom wykonania 70%), w którym należało wyznaczyć dominantę i medianę zestawu danych przedstawionych na dołączonym do treści zadania wykresie słupkowym. Niewiele niższy poziom wykonania (68%) odnotowano w otwartym zadaniu 10. krótkiej odpowiedzi, które sprawdzało umiejętność rozwiązywania nierówności kwadratowej.

Było ono umiarkowanie trudne dla tegorocznych maturzystów, choć pojawienie się zadania z tego zakresu nie powinno stanowić zaskoczenia dla zdających.

Porównywalny do poziomu wykonania zadania 10. osiągnięto w zadaniu 11. Było to zadanie z luką otwartą, złożone z czterech podpunktów, w których na podstawie dołączonego do zadania wzoru oraz wykresu funkcji f należało określić jej dziedzinę i zbiór wartości, zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości dodatnie, oraz zbiór wszystkich rozwiązań równania $f(x) = 3$. Poziom wykonania tego zadania to 69%.

Analiza wskaźników poziomu wykonania poszczególnych zadań arkusza egzaminacyjnego z matematyki na poziomie podstawowym pozwala zauważyć, że – podobnie jak w latach poprzednich – maturzyści najlepiej poradzili sobie głównie z rozwiązaniem zadań zamkniętych, które dotyczyły zastosowania elementarnych pojęć i wykorzystania własności obiektów matematycznych w sytuacjach prostych i typowych. Natomiast zadania otwarte, których rozwiązanie wymaga zaplanowania strategii, były dla tegorocznych maturzystów trudne i umiarkowanie trudne.

Analiza jakościowa zadań – poziom rozszerzony

Zadania, z którymi zdający poradzili sobie najłagodniej

Wśród trzech najtrudniejszych zadań tegorocznego egzaminu maturalnego na **poziomie rozszerzonym**, których wykonalność okazała się mniejsza od 24 %, dwa zadania badają umiejętności z obszaru *Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji*, a jedno zadanie bada umiejętności z obszaru *Rozumowanie i argumentacja*. Kolejne – ze względu na wzrastający poziom wykonalności – pięć zadań to zadania z obszaru *Rozumowanie i argumentacja*.

Poniżej przeanalizujemy trzy najtrudniejsze zadania i przyjrzymy się najczęstszemu sposobom ich rozwiązania oraz błędom, jakie popełniali zdający.

Najtrudniejszym zadaniem dla tegorocznych maturzystów okazało się zadanie 4. – poziom wykonalności tego zadania to 18 %. Zadanie to badało umiejętność obliczenia prawdopodobieństwa warunkowego. Doświadczeniem losowym rozpatrywanym w zadaniu był czterokrotny rzut tradycyjną sześcienną kostką do gry, dlatego zdający zwykle nie mieli problemów z obliczeniem liczby wszystkich zdarzeń elementarnych. Za ten element rozwiązania nie otrzymywali jednak punktu, gdyż obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych nie jest konieczne do obliczenia prawdopodobieństwa warunkowego. Istotne elementy rozwiązania tego zadania to obliczenie liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu polegającemu na tym, że w dokładnie dwóch spośród czterech rzutów wypadnie pięć oczek oraz obliczenie liczby tych zdarzeń elementarnych, które sprzyjają zdarzeniu polegającemu na tym, że dokładnie dwa razy wypadnie pięć oczek i jednocześnie co najmniej jeden raz wypadnie sześć oczek.

Przykłady 1R i 2R przedstawiają pełne rozwiązanie tego zadania, przy czym autor rozwiązania przedstawionego w Przykładzie 2. prawie nie używa specyficznej dla rachunku prawdopodobieństwa symboliki.

Przykład 1R.

Przykład 1R. (Handwritten solution on grid paper):

$$\begin{aligned}
 & \text{Zadanie 4 } P(A) - \text{co najmniej raz 6} \quad | \Omega | = 6^4 \\
 & P(B) - \text{dokładnie dwa razy 5} \\
 & P(A \cap B) - \text{dokładnie jedno 6 i dwa razy 5.} \\
 & \text{Wybór 6: } \binom{4}{1} \cdot 1 \cdot 5 \cdot 5 = 6 \cdot 5 \cdot 5 = \frac{150}{6^4} \\
 & \text{Wybór 5: } \binom{4}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 + \binom{4}{1} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 6 \cdot 2 \cdot 4 + 6 = 54 \\
 & P(A|B) = \frac{54}{150} = \frac{27}{75} = \frac{9}{25}
 \end{aligned}$$

Przykład 2R.

$\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ - na 2-yła kostką
 można wyrzucić 2 razy 5 oczek
 $\binom{4}{2} \cdot 5 \cdot 5 = 6 \cdot 5 \cdot 5 = 150$
 $\binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = 6 \cdot 1 = 6$ - dwa razy
 $\binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot 4 = 6 \cdot 2 \cdot 4 = 48$ - sześć oczek
 odp. $P = \frac{6+48}{150} = \frac{54}{150} = 0,36$

Znacznie rzadziej występowały rozwiązania, w których zdający wykorzystywali następującą własność prawdopodobieństwa warunkowego: $P(A|B) = 1 - P(A'|B)$. W tym sposobie rozwiązania, podobnie jak w poprzednim, należy obliczyć $|B|$ (gdzie B było zdarzeniem polegającym na tym, że w dokładnie dwóch spośród czterech rzutów wypadnie pięć oczek) oraz obliczyć moc zbioru $A' \cap B$, a więc liczbę tych wszystkich zdarzeń elementarnych, w których dokładnie dwa razy wypadnie pięć oczek i jednocześnie ani razu nie wypadnie sześć oczek.

Przykład 3R. przedstawia poprawne rozwiązanie takim właśnie sposobem.

Przykład 3R.

$\bar{A} = 6^4$
 A - min. 1 raz „6” A' - 0 razy „6”
 B - dwa razy „5”
 $1 - P(A'|B) = P(A|B)$
 $1, 2, 3, 4, 5, 6$
 $P(A'|B) = \frac{\binom{4}{2} \cdot 1 \cdot 5^2}{5^4} = \frac{6 \cdot 25}{625} = \frac{6}{25}$
 $A' \cap B = \binom{4}{2} \cdot 1 \cdot 4^2 = 6 \cdot 16$
 $P(A'|B) = \frac{6 \cdot 16}{6 \cdot 25}$
 odp. $P(A|B) = \frac{25-16}{25} = \frac{9}{25}$

Sporadycznie występowały rozwiązania, w których zdający rozważali model probabilistyczny, w którym rozpatrywali jedynie dwa rzuty kostką. Zastosowanie takiego modelu wymaga jednak uzasadnienia, a przynajmniej stwierdzenia, że model, w którym zdarzeniem

elementarnym jest dwuwyrazowy ciąg o wyrazach ze zbioru pięcioelementowego $\{1, 2, 3, 4, 6\}$ jest równoważny modelowi, w którym zdarzeniami elementarnymi są czterowyrazowe ciągi o wyrazach ze zbioru sześćelementowego $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Poniższy Przykład 3R ilustruje ten sposób rozwiązania. Na uwagę zasługuje w tym przykładzie zdanie: „Odrzucam” dwa rzuty z 5, bo nie dają sukcesu. Maturzysta stwierdził w nim, może zbyt lakonicznie, że do obliczenia szukanego prawdopodobieństwa warunkowego wystarczy rozważyć model probabilistyczny, w którym zdarzeniem elementarnym jest dwuwyrazowy ciąg. Wszystkie te ciągi zilustrował w tabeli 5x5. Jednocześnie zaznaczył w niej 9 pól odpowiadających parom, w których co najmniej jeden wyraz jest szóstką. W rezultacie całe rozwiązanie sprowadza się do zapisania ułamka $\frac{9}{25}$.

Przykład 4R.

„Odrzucam” dwa rzuty z 5, bo nie dają sukcesu.

$\{6, 1\}$ $\{1, 6\}$
 $\{6, 2\}$ $\{2, 6\}$
 $\{6, 3\}$ $\{3, 6\}$
 $\{6, 4\}$ $\{4, 6\}$
 $\{6, 5\}$ $\{5, 6\}$
 $\{6, 6\}$

	1	2	3	4	6
1					X
2					X
3					X
4					X
6	X	X	X	X	X

$$P(A) = \frac{9}{25}$$

Granica między w pełni poprawnym rozwiązaniem, a rozwiązaniem z usterką była niekiedy trudno uchwytna. Tę drugą sytuację ilustruje poniższy Przykład 5R. Z rozwiązania wynika, że zdający rozpatruje ciągi czterowyrazowe postaci $(5, 5, x, y)$, w których trzeci i czwarty wyraz jest różny od 5. Przyjęcie takiego modelu wymaga wyjaśnienia, czego w tym rozwiązaniu niestety nie ma.

Przykład 5R.

A – wyrzucono co najmniej jeden raz 6 oczek
 A' – ani razu nie wyrzucono 6 oczek
 B – wyrzucono dokładnie 2 razy 5 oczek

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{16}{25} = 1 - \frac{|A' \cap B|}{|B|}$$

$$|B| = \frac{1}{5 \text{ oczek}} \cdot \frac{1}{5 \text{ oczek}} \cdot \frac{5}{\text{dokładnie 1. oczek oprócz 5}} \cdot \frac{5}{\text{dokładnie 1. oczek oprócz 5}} = 25$$

~~$|A \cap B|$~~ – wyrzucono co najmniej

~~$|A' \cap B|$~~ – ani razu nie wyrzucono 6 oczek i dokładnie 2 razy wyrzucono 5 oczek

$$|A' \cap B| = \frac{1}{5 \text{ oczek}} \cdot \frac{1}{5 \text{ oczek}} \cdot \frac{4}{\text{bez 5 i bez 6}} \cdot \frac{4}{\text{bez 5 i bez 6}} = 16$$

$$P(A|B) = \frac{16}{25} = 1 - \frac{16}{25} = \frac{25-16}{25} = \frac{9}{25}$$

Wykonalność tego zadania na poziomie 14 % nie oznacza oczywiście, że 14 % maturzystów rozwiązało to zadanie. Odsetek ten oznacza, że co najmniej 86 % rozwiązujących to zadanie nie otrzymało maksymalnej liczby 3 punktów.

Przyjrzymy się kilku przykładom, które ilustrują częściowo rozwiązane zadanie.

W Przykładzie 6R zdający poprawnie obliczył liczbę wszystkich czterowyrazowych ciągów, których dokładnie dwa wyrazy to piątki. Popęłił błąd, obliczając liczbę tych ciągów, których dokładnie dwa wyrazy to piątki i jednocześnie co najmniej jeden wyraz to szóstka, a dokładniej w miejscu, w którym obliczał, ile jest tych ciągów, w których jest dokładnie jedna szóstka. Zapis $\binom{4}{2} \cdot 1 \cdot 5$ wskazuje, że zdający poprawnie ustalił, na ile sposobów można rozmieścić dwie piątki na czterech miejscach, ale brak w zapisanym iloczynie czynnika 2 oznacza, że zdający nie uwzględnił położenia szóstki (lub wyrazu różnego od piątki i różnego od szóstki) na jednym z pozostałych dwóch miejsc.

Przykład 6R.

$$\overline{n} = 6^4$$

$$\overline{B} = \binom{4}{2} \cdot \underbrace{5 \cdot 5}_{\substack{\text{1, 2, 3, 4, 6} \\ 2 \cdot 5}} = \frac{4!}{2!2!} \cdot 5 \cdot 5 = 30 \cdot 5 = 150$$

$$\overline{A \cap B} = \binom{4}{1} \cdot 1 \cdot 5 + \binom{4}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 4 \cdot 5 + 6 = 26$$

$$P(A|B) = \frac{26}{150} = \frac{13}{75}$$

Kolejny Przykład 7R ilustruje często spotykaną próbę wykorzystania schematu Bernoullego.

Przykład 7R.

$n=4$

① $P(A)$ - otrzymamy co najmniej 1 szóstkę
 ② $P(B)$ - otrzymamy dokładnie 2 razy 5

p - otrzymamy 6 szóstek = $\frac{1}{6}$
 p - nie otrzymamy 6 szóstek = $\frac{5}{6}$

$P_4(0) = \binom{4}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6^4} = \frac{1}{6^4}$

③ $P(A) = 1 - \frac{1}{6^4} = 1 - \frac{1}{1296} = \frac{1295}{1296}$

$P(B)$ $k=2$ $n=4$
 p - otrzymamy 5 szóstek = $\frac{1}{6}$
 p - nie otrzymamy 5 szóstek = $\frac{5}{6}$

$P_4(2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 6 \cdot \frac{25}{6^4} = \frac{25}{6^3}$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1295}{6^4} \cdot \frac{25}{6^3} = \frac{32375}{6^7}$

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{32375}{6^7}}{\frac{25}{6^3}} = \frac{32375}{6^4} \cdot \frac{6^3}{25} = \frac{1295}{6} = \frac{1295}{6}$

Schemat ten można było wykorzystać tylko do obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia B . Do obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia $A \cap B$ wykorzystać tego schematu wprost nie można było. W rozwiązaniu tym maturzysta, wykorzystując schemat Bernoullego, poprawnie obliczył prawdopodobieństwo zdarzenia B . W kolejnym Przykładzie 8R maturzysta również próbował wykorzystać schemat Bernoullego, ale tym razem bez powodzenia.

Przykład 8R.

$|A|$ - dokładnie dwa razy pięć oczek
 $|B|$ - 2 razy 5 or
 $|B|$ - ani razu nie
 $|B|$ - otrzymamy 6 oczek
 $p = \frac{1}{6}$ $q = \frac{5}{6}$
 $P(A|B) = \frac{1}{2}$
 $P(B) =$
 $p = \frac{1}{6}$ $q = \frac{5}{6}$ $n = 4$ $k = 1, k=2, k=3, k=4$
 $P_n(k) = \binom{4}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{4-k}$
 $P_n(k)$ - przeciwne zdarzenie (nie wypadnie ani razu)
 $P_4(0) = \binom{4}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}$
 $1 - P_n(k) = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296}$
 odp. prawdopodobieństwo wynosi $\frac{671}{1296}$

Przykład 10R pokazuje częściowo poprawne rozwiązanie, w którym zdający poza poprawnie obliczoną liczbą wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$, obliczył też poprawnie moc zbioru B . Posłużył się przy tym jedynie regułą mnożenia i regułą dodawania – dwiema podstawowymi metodami zliczania, których znajomość wymagana jest na poziomie podstawowym.

Przykład 10R.

A - co najmniej jeden raz sześć oczek
 A - ani razu 6 oczek
 $\bar{A} = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$
 $\bar{A} = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$
 $P(A) = \frac{625}{1296}$
 $P(\bar{A}) = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296}$
 B - dwa razy pięć oczek
 $B = 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 5 + 1 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 5 + 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 1 + 1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 = 25 + 25 + 25 + 25 + 25 + 25 = 150$
 $P(B) = \frac{150}{1296}$

W wielu rozwiązaniach zdający potrafili jedynie obliczyć liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych. Taką sytuację ilustrują przykłady 11R i 12R.

W pierwszym z tych przykładów warto zwrócić uwagę na niepoprawnie używaną symbolikę: $\Omega = 6^4$ (nagminnie stosowany niepoprawny zapis) zamiast $|\Omega| = 6^4$; „ $P(A \cap B)$ – co najmniej [...]” zamiast $A \cap B$ – co najmniej [...], „ $P(A \cap B) = 6^4 - 5^4$ ” zamiast $|A \cap B| = 6^4 - 5^4$. Użycie przez zdającego takiej symboliki pozwala przypuszczać, że realizował on jednak rozszerzony program matematyki.

Przykład 11R.

$$\Omega = 6^4 = 1296$$

$P(A \cap B)$ – co najmniej jeden raz sześć oczek
 $P(B)$ – dokładnie dwa razy pięć oczek

$$P(A \cap B) = 6^4 - 5^4 = 1296 - 625 = 671$$

$$P(B) = C_4^2 \cdot 5^2 \cdot 1^2 = 25$$

$$P(A/B) =$$

W Przykładzie 12R zdający poprawnie stosuje symbolikę matematyczną, ale jedyna poprawnie obliczona wielkość to $|\Omega| = 6^4 = 1296$.

Przykład 12R.

Ω – przestrzeń prób losowania kulek
 A – co najmniej raz otrzymamy sześć oczek
 B – dokładnie dwa razy pięć oczek

$$|\Omega| = 6^4 = 1296$$

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{1296}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{1296}$$

$$P(A/B) = \frac{\frac{25}{1296}}{\frac{25}{1296}} = 1$$

$$P(B/A) = \frac{\frac{25}{1296}}{\frac{1}{6}} = \frac{5}{1296}$$

Drugim wśród najtrudniejszych zadań tegorocznego egzaminu na poziomie rozszerzonym okazało się **zadanie 10**. Poziom wykonalności tego zadania jest równy 22 %. Zadanie to bada umiejętności z obszaru *Rozumowanie i argumentacja*, który wypadł najslabiej w tegorocznym egzaminie na poziomie rozszerzonym. Konstrukcyjnie jest to zadanie rozszerzonej odpowiedzi, z zakresu stereometrii punktowane w skali 0 – 5 punktów. Bryłą, której dotyczy to zadanie, jest ostrosłup prostokątny o podanej długości krawędzi podstawy oraz podanym cosinusie kąta między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi, które nie są prostopadłe do płaszczyzny

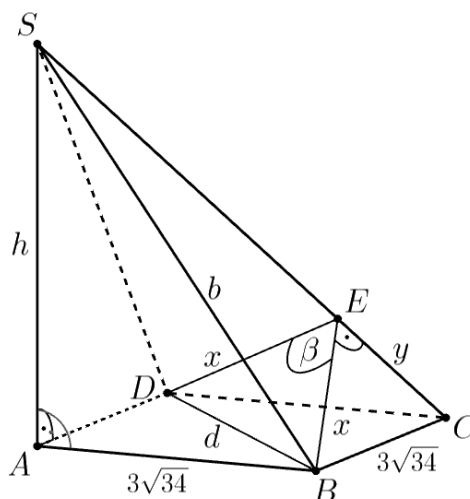
podstawy. Wielkością, którą należy obliczyć, jest pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa. Nazwa ostrosłup prostokątny nie występuje w treści zdania. Do treści nie został też załączony rysunek ostrosłupa. Brak rysunku z pewnością był dla wielu zdających dodatkową trudnością. Ostrosłup ten został natomiast precyzyjnie i jednoznacznie opisany w treści zadania, która jest następująca:

Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest kwadrat $ABCD$. Krawędź boczna SA jest wysokością ostrosłupa, natomiast krawędź podstawy ma długość $3\sqrt{34}$. Cosinus kąta β między ścianami bocznymi CDS i BCS tego ostrosłupa jest równy $\left(-\frac{9}{25}\right)$.

Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.

Rozwiązanie tego zadania można zrealizować na bardzo wiele sposobów. Generalnie można te sposoby podzielić na dwie grupy ze względu na początkową fazę rozwiązania.

Do pierwszej z tych grup zaliczymy te rozwiązania, w których zdający wykorzystywali twierdzenie cosinusów dla trójkąta BDE , gdzie E jest spodkiem wysokości ścian bocznych BCS i CDS opuszczonych na krawędź CS .



Otrzymujemy w ten sposób równanie

$$d^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \cos \beta$$

Ponieważ $d = 3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2}$ (długość przekątnej kwadratu), a $\cos \beta = -\frac{9}{25}$, więc dostajemy

$$9 \cdot 34 \cdot 2 = 2x^2 - 2x^2 \cdot \left(-\frac{9}{25}\right)$$

i stąd $x = 15$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BCE obliczamy długość y odcinka CE :

$$y = \sqrt{(3\sqrt{34})^2 - 15^2} = 9$$

Dalsza część rozwiązania zależy teraz od tego, czy zauważymy, że ściany boczne BCS i CDS to trójkąty prostokątne, czy też tego nie zauważymy. Fakt ten wynika natychmiast z twierdzenia o trzech prostokątach, gdyż odcinek AB jest rzutem prostokątnym krawędzi BS na płaszczyznę podstawy ostrosłupa, a odcinki AB i BC są prostopadłe, bo są to dwa sąsiednie boki kwadratu.

Jeśli wiemy, że trójkąt BCS jest prostokątny, to wystarczy zauważyć, że jest on podobny do trójkąta ECB (oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku C). Z tego podobieństwa otrzymujemy proporcję

$$\frac{|BS|}{|BC|} = \frac{|EB|}{|EC|}$$

czyli $\frac{b}{3\sqrt{34}} = \frac{15}{9}$, i stąd $b = 5\sqrt{34}$.

Do obliczenia pola powierzchni bocznej potrzebujemy jeszcze tylko długości h przyprostokątnej SA trójkąta prostokątnego ABS . Tę możemy obliczyć z twierdzenia Pitagorasa dla tego trójkąta

$$h = \sqrt{(5\sqrt{34})^2 - (3\sqrt{34})^2} = 4\sqrt{34}$$

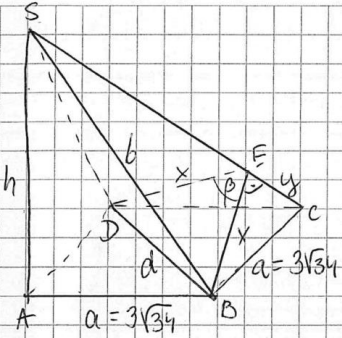
Możemy też zauważyć, że jest to trójkąt pitagorejski podobny do trójkąta o bokach 3, 4, 5 w skali $\sqrt{34}$.

Pole powierzchni bocznej ostrosłupa jest zatem równe

$$P_b = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{34} \cdot 4\sqrt{34} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{34} \cdot 5\sqrt{34} = 12 \cdot 34 + 15 \cdot 34 = 918$$

Taki sposób rozwiązania przedstawia Przykład 13R.

Przykład 13R.



$cl = a\sqrt{2} = 3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{68}$
 $\triangle BDE: d^2 = x^2 + x^2 - 2x \cdot x \cos \beta$
 $9 \cdot 68 = 2x^2 + 2x^2 \cdot \frac{9}{25}$
 $9 \cdot 34 = x^2 + x^2 \cdot \frac{9}{25}$
 $306 = \frac{34}{25} x^2$
 $x^2 = 225$
 $x = 15$
 $\triangle BCE: a^2 = x^2 + y^2$
 $9 \cdot 34 = 15^2 + y^2$
 $y^2 = 306 - 225 = 81$
 $y = 9$
 $\triangle BCS \sim \triangle BCE \text{ (kkk)}: \frac{b}{a} = \frac{x}{y}$
 $b = \frac{3\sqrt{34} \cdot 15}{9} = 5\sqrt{34}$
 $\triangle ABS: b^2 = h^2 + a^2$
 $h^2 = 25 \cdot 34 - 9 \cdot 34$
 $h^2 = 850 - 306 = 544$
 $h = \sqrt{544}$
 $P_b = 2P_{ABS} + 2P_{BCS} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{34} \cdot \sqrt{544} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{34} \cdot 5\sqrt{34} =$
 $= 3\sqrt{18496} + 15 \cdot 34 = 3 \cdot 136 + 510 =$
 $= 408 + 510 = 918$

Fakt, że trójkąt BCS jest prostokątny możemy też wykorzystać nieco inaczej. Ponieważ x jest wysokością tego trójkąta opuszczoną z wierzchołka kąta prostego, więc możemy zapisać równanie

$$x^2 = y \cdot |SE|$$

$$15^2 = 9 \cdot |SE|$$

Stąd $|SE| = 25$. Mamy zatem długość krawędzi bocznej $|SC| = 9 + 15 = 34$. Teraz, podobnie jak poprzednio, do obliczenia pola powierzchni bocznej potrzebujemy jeszcze wielkość h . Tę możemy obliczyć z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ACS :

$$h = \sqrt{34^2 - (3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2})^2} = \sqrt{34^2 - 18 \cdot 34} = \sqrt{34 \cdot (34 - 18)} = \sqrt{16 \cdot 34} = 4\sqrt{34}$$

Pole powierzchni bocznej ostrosłupa jest zatem równe

$$P_b = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{34} \cdot 4\sqrt{34} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 34 \cdot 15 = 12 \cdot 34 + 15 \cdot 34 = 918$$

Ten wariant rozwiązania przedstawia Przykład 14R.

Przykład 14R.

2) $15^2 + L^2 = (3\sqrt{34})^2$
 $225 + L^2 = 306$
 $L^2 = 81 \quad L > 0$
 $L = 9$

3) $15^2 = 9 \cdot p$
 $225 = 9p$
 $p = 25$

4) $|CS| = p + L = 9 + 25 = 34$

1) $(6\sqrt{17})^2 = h^2 + h^2 - 2h \cdot h \cdot (-\frac{9}{25})$
 $612 = 2h^2 + \frac{18}{25}h^2$
 $612 = \frac{68}{25}h^2$
 $h^2 = \frac{612 \cdot 25}{68}$
 $h^2 = 225 \quad h > 0$
 $h = 15$

5) $x^2 + (3\sqrt{34})^2 = 34^2$
 $x^2 + 306 = 1156$
 $x^2 = 850 \quad x > 0$
 $x = 5\sqrt{34}$

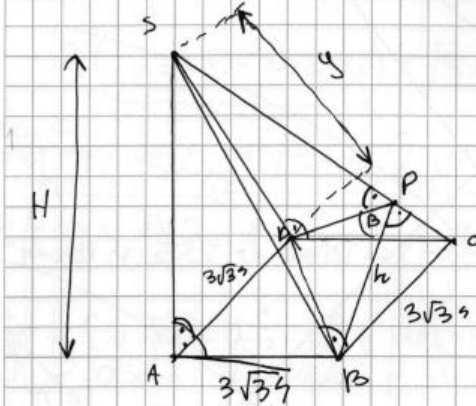
$|BD| = 3\sqrt{34} \cdot \frac{1}{2} = 3\sqrt{68} = 6\sqrt{17}$

$\cos \beta = -\frac{9}{25}$

$$\begin{aligned}
 6) \quad & H^2 + (3\sqrt{34})^2 = (5\sqrt{34})^2 \\
 & H^2 + 306 = 850 \\
 & H^2 = 544 \quad H > 0 \\
 & H = 4\sqrt{34} \\
 \\
 7) \quad & P_0 = P_{ABS} + P_{ADS} + P_{BCS} + P_{DCS} \\
 & P_0 = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{34} \cdot 4\sqrt{34} + \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{34} \cdot 4\sqrt{34} + \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{34} \cdot 3\sqrt{34} + \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{34} \cdot 3\sqrt{34} \\
 & = 204 + 204 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^{255} + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^{255} = \\
 & = 408 + 255 + 255 = 918
 \end{aligned}$$

Jeszcze inny wariant wykorzystania faktu, że trójkąt BCS jest prostokątny, możemy zaobserwować w rozwiązaniu przedstawionym w Przykładzie 15R.

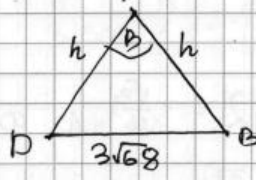
Przykład 15R.



$\cos B = -\frac{8}{25}$
 $P_0 = ?$
 $|BS| = |DS| = y$
 $|SC| = z$
 $\angle BSC = 90^\circ$

① $|BS| = |DS|$ (na mocy Pitagorasa $\triangle ABS$ i $\triangle ADS$)
 $|BC| = |DC| = 3\sqrt{3}$

② $\triangle BCS \cong \triangle DCS$ (b.b.) $|BD| = 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{68}$
 $|BP| = |PD| = h$



W tw cos:
 $612 = 2h^2 - 2h^2 \cdot -\frac{8}{25} \cdot 25$
 $15300 = 2h^2 + 18h^2$
 ~~$20h^2 = 15300$~~
 $68h^2 = 15300 \quad |:68$

$$h^2 = 225 \sqrt{5}$$

$$h = 15$$

$$\begin{cases} 1) H^2 + (3\sqrt{34})^2 = y^2 \\ 2) y^2 + (3\sqrt{34})^2 = z^2 \\ 3) z = \frac{\sqrt{34}}{5} y \end{cases}$$

$$1) 2) \rightarrow y^2 + 306 = \frac{34}{25} y^2$$

$$\frac{22}{25} y^2 = 306 \quad | : \frac{22}{25}$$

$$y^2 = 850 \sqrt{5}$$

$$y = \sqrt{850} \rightarrow H^2 + 306 = 850$$

$$H^2 = 544 \rightarrow H = \sqrt{544}$$

$$P_G = 3\sqrt{34} \cdot \sqrt{544} \cdot \frac{1}{2} + 3\sqrt{34} \cdot \sqrt{850} \cdot \frac{1}{2}$$

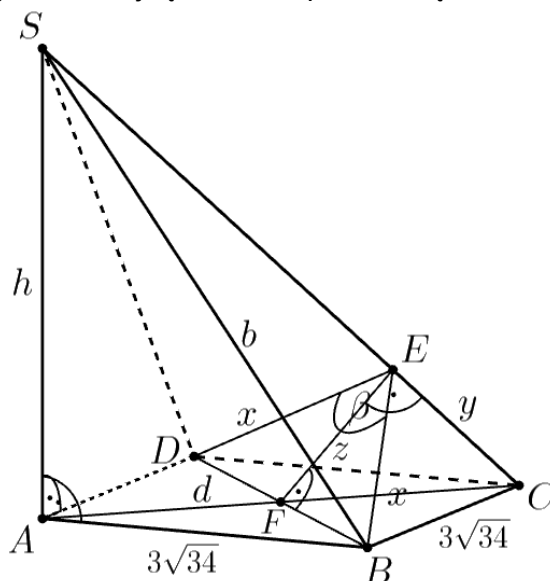
$$P_G = 3\sqrt{18496} + 3\sqrt{28800}$$

$$P_G = 3 \cdot 136 + 3\sqrt{170^2} = 3(136 + 170) = 918$$

Autor tego rozwiązania ułożył układ trzech równań z trzema niewiadomymi. Dwa z tych równań wynikają z twierdzenia Pitagorasa, trzecie – ze wzoru pole trójkąta.

Inne wykorzystanie faktu, że trójkąt BCS jest prostokątny, to zastosowanie funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w tym trójkącie. Ich wykorzystanie w gruncie rzeczy prowadzi to do tych samych proporcji, które wynikają z podobieństwa trójkątów.

Drugą grupę rozwiązań, znacznie mniej liczną od omówionej wcześniej, stanowią te, w których zdający wykorzystywali wysokość trójkąta BED opuszczoną z wierzchołka E .



Tę wysokość możemy obliczyć na różne sposoby. Pokażemy dwa z nich. Pierwszy polega na zastosowaniu twierdzenia cosinusów dla trójkąta BDE . Stąd obliczamy (w sposób opisany poprzednio) $x = 15$. Teraz z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BEF możemy obliczyć długość z odcinka FE :

$$z = \sqrt{15^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{225 - 153} = 6\sqrt{2}$$

Drugi sposób oparty jest na zauważeniu, że wysokość FE trójkąta BDE jest jednocześnie dwusieczną kąta β . Wobec tego z trójkąta prostokątnego BEF otrzymujemy

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{|FB|}{|FE|} = \frac{\frac{1}{2}d}{z} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2}}{z} = \frac{3\sqrt{17}}{z}$$

Ze wzoru na cosinus podwojonego kąta mamy

$$\cos \beta = 2 \cos^2 \frac{\beta}{2} - 1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{\beta}{2}$$

Stąd

$$\begin{aligned} 2 \cos^2 \frac{\beta}{2} - 1 &= -\frac{9}{25} \quad \text{oraz} \quad 1 - 2 \sin^2 \frac{\beta}{2} = -\frac{9}{25} \\ \cos^2 \frac{\beta}{2} &= \frac{8}{25} \quad \text{oraz} \quad \sin^2 \frac{\beta}{2} = \frac{17}{25} \\ \cos \frac{\beta}{2} &= \frac{2\sqrt{2}}{5} \quad \text{oraz} \quad \sin \frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{17}}{5} \end{aligned}$$

gdyż $\frac{\beta}{2}$ jest kątem ostrym. Zatem

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{17}}{5}}{\frac{2\sqrt{2}}{5}} = \frac{\sqrt{17}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{34}}{4}$$

Otrzymujemy więc równanie

$$\frac{3\sqrt{17}}{z} = \frac{\sqrt{34}}{4}$$

z którego dostajemy $z = 6\sqrt{2}$.

Jak widać drugi z tych sposobów jest dłuższy, ale do obliczenia długości odcinka FE nie potrzebna jest tu długość odcinka BE .

Po obliczeniu długości odcinka FE możemy obliczyć długość y odcinka CE .

Wykorzystamy twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta CEF :

$$y = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2}\right)^2 - (6\sqrt{2})^2} = \sqrt{153 - 72} = 9$$

Druga faza rozwiązania zadania tym sposobem, a właściwie całą grupą sposobów, polega na zauważeniu podobieństwa trójkątów CEF i CAS , a następnie obliczeniu długości h odcinka SA . Z tego podobieństwa otrzymujemy

$$\frac{h}{d} = \frac{z}{y}$$

Stąd

$$h = \frac{d \cdot z}{y} = \frac{3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2}}{9} = 4\sqrt{34}$$

Teraz do obliczenia pola powierzchni bocznej potrzebujemy jeszcze tylko długości b przyprostokątnej SB trójkąta prostokątnego BCS . Tę możemy obliczyć z twierdzenia Pitagorasa dla tego trójkąta:

$$b = \sqrt{(4\sqrt{34})^2 + (3\sqrt{34})^2} = 5\sqrt{34}$$

Wtedy pole powierzchni bocznej ostrosłupa obliczamy, sumując podwojone pola trójkątów prostokątnych ABS i BCS :

$$P_b = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{34} \cdot 4\sqrt{34} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{34} \cdot 5\sqrt{34} = 12 \cdot 34 + 15 \cdot 34 = 918$$

Zamiast obliczać długość b krawędzi bocznej BS możemy obliczyć długość krawędzi bocznej CS . Także skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa, tylko tym razem dla trójkąta CAS :

$$|CS| = \sqrt{(4\sqrt{34})^2 + (3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2})^2} = \sqrt{16 \cdot 34 + 18 \cdot 34} = 34$$

Wtedy nie musimy nawet wiedzieć, że trójkąt BCS jest prostokątny, gdyż mamy długość podstawy CS i wysokość opuszczoną na tę podstawę. Pole powierzchni bocznej ostrosłupa jest zatem równe

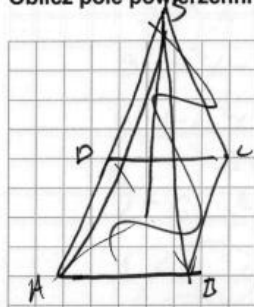
$$P_b = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{34} \cdot 4\sqrt{34} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{34} \cdot 5\sqrt{34} = 12 \cdot 34 + 15 \cdot 34 = 918$$

Rozwiązanie reprezentujące tę grupę rozwiązań przedstawia Przykład 16R.

Do obliczenia wysokości trójkąta BDE opuszczonej z wierzchołka E zdający wykorzystał związek między cosinusem kąta i tangensem połowy tego kąta. Stąd szybko obliczył tangens kąta $\frac{\beta}{2}$.

Przykład 17R.

Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.



$$P_b = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{14} \cdot h +$$

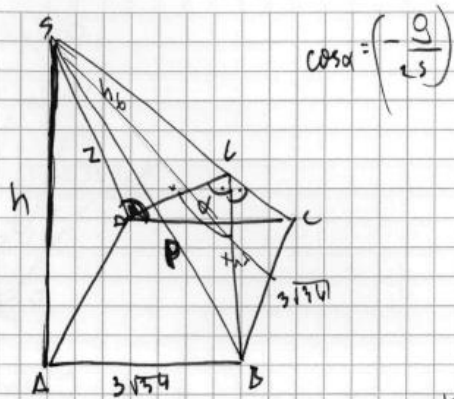
$$(6\sqrt{17})^2 = 2x^2 + 2 \cdot x^2 \cdot \frac{9}{25}$$

$$36 \cdot 17 = \frac{50}{25}x^2 + \frac{18}{25}x^2$$

$$\frac{612}{25} = \frac{68}{25}x^2 \quad | \cdot \frac{25}{68}$$

$$x^2 = \frac{612 \cdot 25}{68} = 225$$

$$x = 15 \quad \text{bo } x > 0$$



$$\cos \alpha = \left(-\frac{9}{25} \right)$$

$$a = 3\sqrt{14}$$

$$a^2 = 3\sqrt{68} = 3 \cdot 2\sqrt{17}$$

$$= 6\sqrt{17}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 15 = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{14} \cdot h_b$$

$$l = \frac{3\sqrt{14} \cdot h_b}{15} \Rightarrow \frac{3\sqrt{14} \cdot 3\sqrt{14}}{15 \cdot 2} = \frac{34}{2} \cdot 17$$

$$\left(\frac{3\sqrt{14}}{2} \right)^2 + (h_b)^2 = l^2$$

$$\frac{9}{4} \cdot 34 + h_b^2 = \frac{8 \cdot 34 \cdot h_b^2}{225 \cdot 25}$$

$$\frac{153}{2} + h_b^2 = \frac{34}{25} h_b^2$$

$$\frac{153}{2} = \frac{34}{25} h_b^2 - \frac{13}{25} h_b^2$$

$$\frac{153}{2} = \frac{3}{25} h_1^2 \quad | \cdot \frac{25}{3}$$

$$h_1^2 = \frac{153}{2} \cdot \frac{25}{3} = \frac{425}{2} \quad \frac{425}{2} = 212,5$$

$$h_1 = \frac{\sqrt{425}}{\sqrt{2}} \quad h_1 > 0$$

$$h_1 = \frac{5\sqrt{17}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{34}}{2}$$

$$P_{BCS} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{34}}{2} \cdot 3\sqrt{4} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 15 \cdot 34 \cdot \frac{5 \cdot 10}{4} = 127,5$$

$$z^2 + 9 \cdot 34 = 17^2$$

$$z^2 = 289 - 306$$

$$(3\sqrt{34})^2 + h_1^2 = r^2$$

$$r^2 = 9 \cdot 34 + \frac{425}{2} =$$

$$= 306 + \frac{425}{2} = \frac{612 + 425}{2} = \frac{1037}{2}$$

$$r = \frac{\sqrt{1037}}{\sqrt{2}}$$

$$P_{BCS} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{34} \cdot \frac{\sqrt{1037}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \sqrt{124234}$$

$$h = \sqrt{\frac{1037}{2} - 9 \cdot 34} = \sqrt{\frac{1037}{2} - \frac{612}{2}} = \frac{\sqrt{425}}{\sqrt{2}}$$

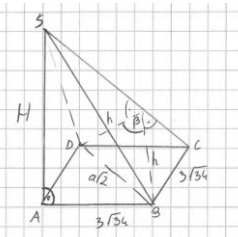
$$P_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{119}}{\sqrt{2}} \cdot 3\sqrt{4} = \frac{3\sqrt{2023}}{2}$$

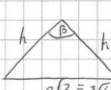
$$P_{ADS} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{119}}{\sqrt{2}} \cdot 3\sqrt{34} = \frac{3\sqrt{2023}}{2}$$

$$P_c = 127,5 + 3\sqrt{2023} + \frac{3}{2} \sqrt{124234}$$

Część zdających poprzestawała na obliczeniu długości odcinka BE lub długości odcinków BE i CE . Taka sytuacja ma miejsce w kolejnych Przykładach 18R i 19R.

Przykład 18R i 19R.



$$\cos \beta = -\frac{9}{25}$$


$$a/2 = \sqrt{612} = 6\sqrt{17}$$

z tw. cosinusów

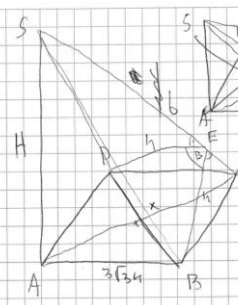
$$(6\sqrt{17})^2 = 2h^2 - 2h^2 \cos \beta$$

$$612 = 2h^2 + \frac{18}{25} h^2$$

$$\frac{68}{25} h^2 = 612$$

$$h^2 = 225$$

$$h = 15$$



$$\cos \beta = -\frac{9}{25}$$

$$P_c = P_p + 2P_{ABS} + 2P_{BCS}$$

$$P_p = (3\sqrt{34})^2 = 612 + 612$$

$$P_p = 1224$$

$$P_p = (3\sqrt{34})^2 = 306$$

$$x = 3\sqrt{63} = 6\sqrt{17}$$

Δ DEB

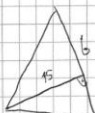
$$x^2 = 612 + 612 = 2h^2 + 2h^2 \cos \beta$$

$$612 = 2h^2 + \frac{18}{25} h^2$$

$$612 = \frac{68}{25} h^2$$

$$9 \cdot 225 h^2 = h^2$$

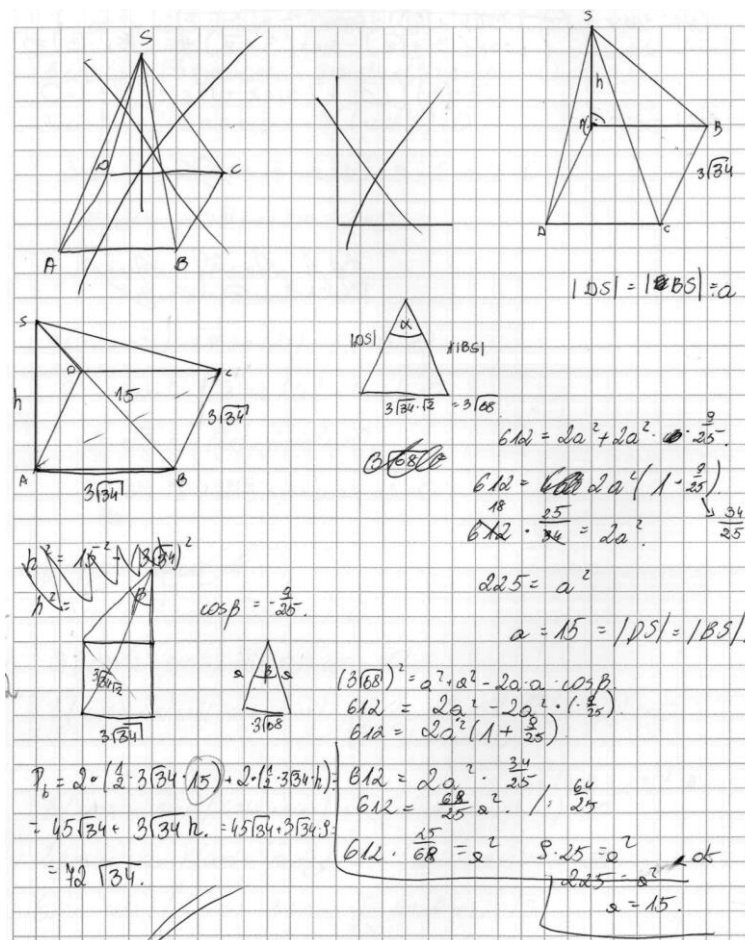
$$h = 15$$

$$\frac{4}{2} h b = P_{BCS}$$


Wśród zdający byli również tacy, którzy nie potrafili poprawnie określić kąta między ścianami bocznymi ostrosłupa – Przykład 20R.

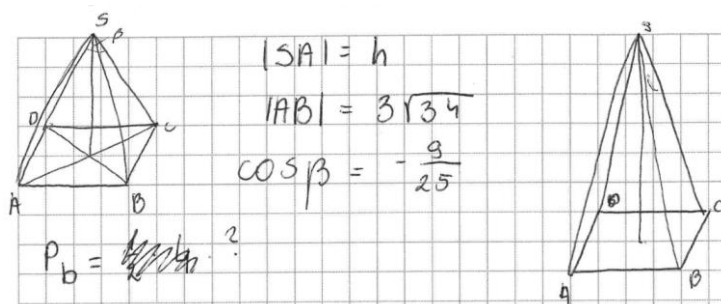
Na pierwszy rzut oka mogłoby wydawać się, że autorowi tego rozwiązania udało się obliczyć długość odcinka BE . Tak jednak nie jest. Poprawny z pozoru wynik jest efektem zastosowania twierdzenia cosinusów w trójkącie równoramiennym o podstawie długości $3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2}$ i kącie β między ramionami, którego cosinus jest równy $\left(-\frac{9}{25}\right)$. Otrzymany odcinek długości 15 nie jest jednak wysokością trójkąta BCS opuszczoną z wierzchołka E , a długością krawędzi bocznej BS ostrosłupa.

Przykład 20R.



Były również rozwiązania (Przykład 21R), których autorzy błędnie interpretowali opisany w treści zadania ostrosłup. Najczęściej rozpatrywali oni ostrosłup prawidłowy czworokątny.

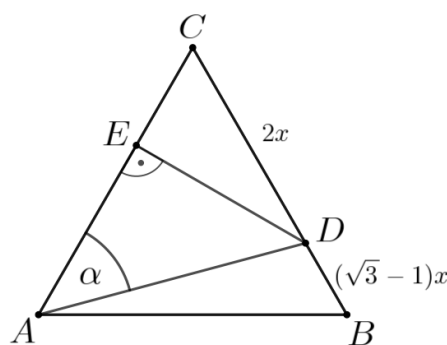
Przykład 21R.



Przejdziemy teraz do omówienia trzeciego pod względem trudności zadania tegorocznego egzaminu, jakim okazało się **zadanie 3**. (poziom wykonania 24 %), za którego poprawne rozwiązanie można było otrzymać 3 punkty. To zadanie badało umiejętności z zakresu geometrii płaszczyzny i dotyczyło podziału trójkąta równobocznego ABC odcinkiem AD , którego koniec D leży na boku BC tego trójkąta, na dwa trójkąty ABD i ADC o podanym stosunku pól równym $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Na podstawie tych danych zdający musiał obliczyć miarę kąta DAC . Pokażemy najpierw rozwiązanie, które wymaga jedynie umiejętności z planimetrii z zakresu podstawowego. Pierwsze spostrzeżenie, jakiego dokonamy w rozwiązaniu tego zadania to zauważenie, że trójkąty ABD i ADC mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka A . Oznacza to, że stosunek pól tych trójkątów jest równy stosunkowi długości ich podstaw, czyli

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Możemy więc przyjąć, że $|BD| = (\sqrt{3}-1)x$ i $|CD| = 2x$.



Zatem długość boku trójkąta ABC jest równa

$$|AB| = |AC| = (\sqrt{3}-1)x + 2x = (\sqrt{3}+1)x$$

Prowadzimy wysokość DE trójkąta ADC . Wtedy trójkąt DCE to połowa trójkąta równobocznego o boku długości $2x$. Z własności takiego trójkąta otrzymujemy

$$|CE| = \frac{1}{2} \cdot |CD| = x \text{ oraz } |DE| = |CE|\sqrt{3} = x\sqrt{3}.$$

Możemy teraz wyznaczyć długość przyprostokątnej AE trójkąta prostokątnego ADE :

$$|AE| = |AC| - |CE| = (\sqrt{3}+1)x - x = x\sqrt{3}$$

Zatem $|AE| = |DE|$, więc trójkąt prostokątny ADE jest równoramienny. To z kolei oznacza, że $\alpha = 45^\circ$.

Tego typu rozwiązania pojawiały się niestety sporadycznie. Jedno z nich przedstawia Przykład 22R. Własności miarowe trójkątów „ekierkowych” (w tym przypadku trójkąta prostokątnego o kątach ostrych 30° i 60°) to jedno z podstawowych narzędzi wykorzystywanych w planimetrii przez uczniów szkoły podstawowej. Uczniowie szkoły średniej tych bardzo prostych narzędzi używają znacznie rzadziej, zastępując je twierdzeniem sinusów i cosinusów, a szkoda, gdyż w wielu zadaniach maturalnych te proste własności wystarczają do rozwiązania zadania, eliminując jednocześnie wiele niepotrzebnych rachunków.

Przykład 22R.

$$\frac{P_{ABD}}{P_{ADC}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\frac{\frac{1}{2}|BD| \cdot h}{\frac{1}{2}|CD| \cdot h} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \approx 0,37 < 1$$

$$|BD| < |CD|$$

$$|BD| = m(\sqrt{3}-1) \quad \text{i} \quad |CD| = 2m$$

e własności $\triangle CDE$ (30-60-90)

$$|CE| = \frac{|CD|}{2} \quad \text{i} \quad |ED| = |CE|\sqrt{3}$$

$$|CE| = \frac{2m}{2} = m \quad \text{i} \quad |ED| = m\sqrt{3}$$

$$|AC| = |BC| = m(\sqrt{3}-1) + 2m = m(\sqrt{3}+1)$$

$$|AE| = m(\sqrt{3}+1) - |CE| = m\sqrt{3} + m - m = m\sqrt{3}$$

$\triangle AED$ jest równoramienny

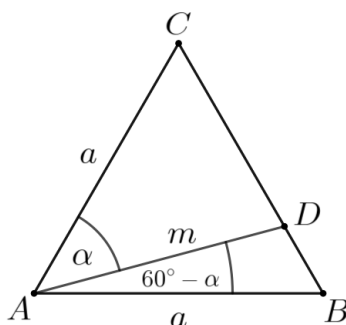
$$|\angle DAE| = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

Odp. 45°

W przeważającej części poprawnych lub częściowo poprawnych rozwiązań maturzyści wykorzystywali funkcje trygonometryczne. Rozwiązanie z użyciem trygonometrii można podzielić na dwie zasadnicze grupy.

Do pierwszej z tych grup zaliczymy te rozwiązania, które nie wykorzystują twierdzenia sinusów ani twierdzenia cosinusów. Poniżej jedno, najczęściej spotykane w tej grupie, rozwiązanie.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Korzystając dwukrotnie ze wzoru na pole trójkąta z sinusem oraz z podanego stosunku pól trójkątów ABD i ADC , otrzymujemy

$$\frac{P_{ABD}}{P_{ADC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |AC| \cdot \sin(60^\circ - \alpha)}{\frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |AB| \cdot \sin \alpha} = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot a \cdot \sin(60^\circ - \alpha)}{\frac{1}{2} \cdot m \cdot a \cdot \sin \alpha} = \frac{\sin(60^\circ - \alpha)}{\sin \alpha}$$

$$\frac{\sin(60^\circ - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

Pozostaje rozwiązać równanie trygonometryczne.

Z własności proporcji i ze wzoru na sinus różnicy kątów otrzymujemy

$$2(\sin 60^\circ \cos \alpha - \cos 60^\circ \sin \alpha) = (\sqrt{3} - 1) \sin \alpha$$

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha\right) = (\sqrt{3} - 1) \sin \alpha$$

$$\sqrt{3} \cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{3} \sin \alpha - \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \sin \alpha$$

Ponieważ kąt α jest ostry, więc $\cos \alpha \neq 0$. Możemy zatem obie strony otrzymanej równości podzielić przez $\cos \alpha$, otrzymując

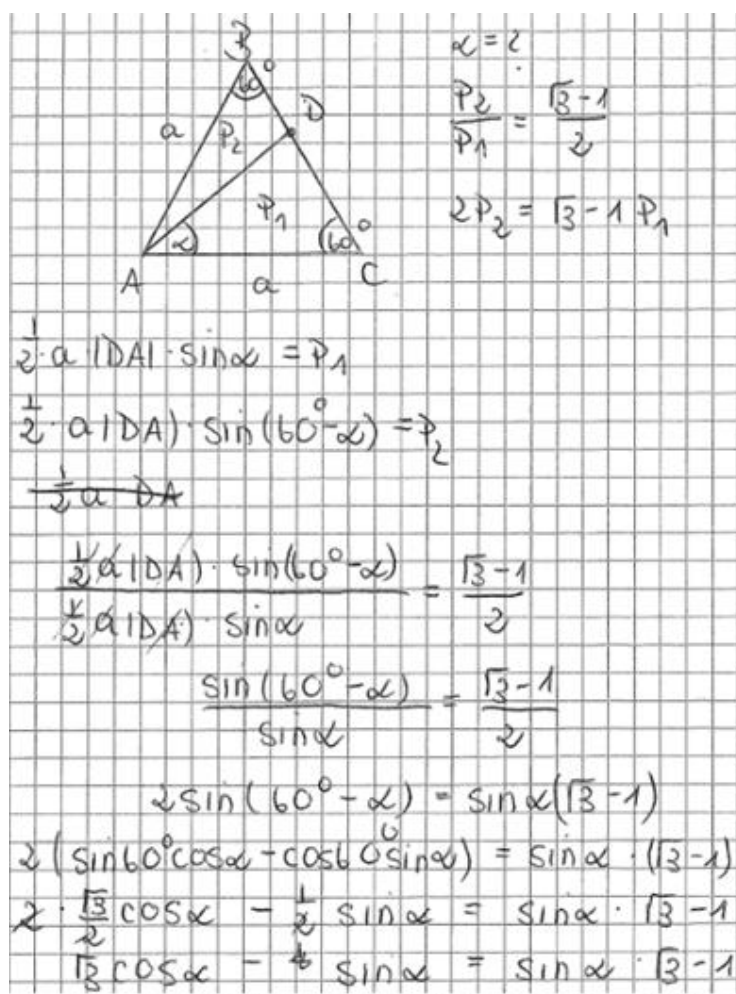
$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 1$$

Zatem $\alpha = 45^\circ$.

Ilustracją takiego sposobu rozwiązania jest Przykład 23R.

Przykład 23R.



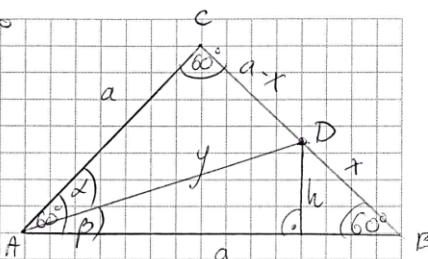
$$\begin{aligned}
 \sqrt{3} \cos \alpha - \sin \alpha &= (\sqrt{3}-1) \sin \alpha \\
 \sqrt{3} \cos \alpha &= (\sqrt{3}-1) \sin \alpha + \sin \alpha \\
 \sqrt{3} \cos \alpha &= \sin \alpha (\sqrt{3}-1+1) \\
 \sqrt{3} \cos \alpha &= \sin \alpha \sqrt{3} \\
 \cos \alpha &= \sin \alpha \\
 \alpha &= 45^\circ \quad \alpha > 0
 \end{aligned}$$

Do drugiej grupy rozwiązań wykorzystujących trygonometrię zaliczymy te, w których wykorzystamy twierdzenie sinusów lub twierdzenie cosinusów, lub jedno i drugie.

Próba rozwiązania zadania takim sposobem została przedstawiona w Przykładzie 24R.

Przykład 24R.

$\angle CAB = \angle ABC = \angle BCA = 60^\circ$
 $\angle DAC = \alpha \quad \alpha = ?$
 $\angle DAB = \beta$
 $\alpha + \beta = 60^\circ \quad \beta = 60^\circ - \alpha$



~~Wykorzystanie twierdzenia sinusów~~
 $P_{ABD} = a \cdot x \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 60^\circ = ay \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \beta$
 $P_{ADC} = a \cdot (a-x) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 60^\circ = ay \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \alpha$
 $\frac{ax \cdot \frac{1}{2} \sin 60^\circ}{a(a-x) \cdot \frac{1}{2} \sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$
 $\frac{ax}{a^2 - ax} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$
 $2ax = (\sqrt{3}-1)(a^2 - ax)$
 $2ax = a\sqrt{3}a^2 - a^2 + ax - \sqrt{3}ax$
 $\sqrt{3}ax + ax = a^2(\sqrt{3}-1)$
 $x(\sqrt{3}a + a) = a^2(\sqrt{3}-1)$
 $x = \frac{a^2(\sqrt{3}-1)}{a(\sqrt{3}+1)} = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)} = \frac{a(\sqrt{3}-1)^2}{3-1} = \frac{a(4-2\sqrt{3})}{2} = a(2-\sqrt{3})$

~~Wykorzystanie twierdzenia cosinusów~~
 $y^2 = a^2 + (a-x)^2 - 2a(a-x) \cdot \cos 60^\circ$

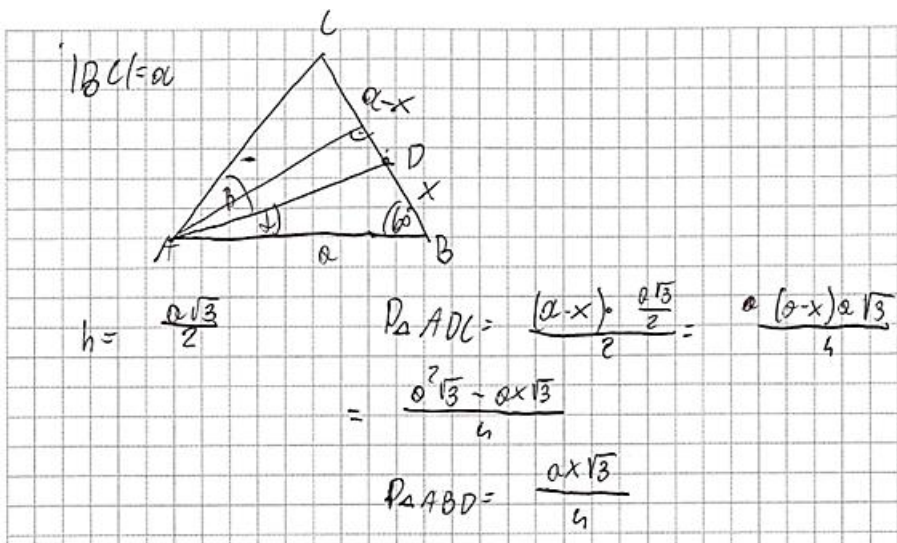
$$\begin{aligned}
 y^2 &= a^2 + a^2(\sqrt{3}-1)^2 - 2a^2(\sqrt{3}-1) \cdot \frac{1}{2} \\
 y^2 &= a^2 + a^2(4-2\sqrt{3}) - a^2(\sqrt{3}-1) \\
 y^2 &= a^2 + 4a^2 - 2\sqrt{3}a^2 - \sqrt{3}a^2 + a^2 \\
 y^2 &= 6a^2 - 3\sqrt{3}a^2 \\
 (a-x)^2 &= a^2 + y^2 - 2ay \cos 60^\circ \\
 a^2(4-2\sqrt{3}) &= a^2 + 6a^2 - 3\sqrt{3}a^2 - 2a^2\sqrt{6-3\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} \cos x \\
 4a^2 - 2\sqrt{3}a^2 &= a^2 + 6a^2 - 3\sqrt{3}a^2 - a^2\sqrt{6-3\sqrt{3}} \cdot \cos x \\
 3a^2 - 3a^2 &= -2a^2\sqrt{6-3\sqrt{3}} \cos x \\
 \frac{-\sqrt{3}+3}{2} &= \sqrt{6-3\sqrt{3}} \cos x \\
 \cos x &= \frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{6-3\sqrt{3}}} = \frac{(3-\sqrt{3})(\sqrt{6-3\sqrt{3}})}{2\sqrt{6-3\sqrt{3}}\sqrt{6-3\sqrt{3}}} = \frac{(3-\sqrt{3})\sqrt{6-3\sqrt{3}}}{2 \cdot 19}
 \end{aligned}$$

Przykład ten pokazuje jak ważna jest sprawność rachunkowa, w tym przypadku w zakresie działań na pierwiastkach. Równanie $\cos \alpha = \frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{6-3\sqrt{3}}}$, jakie po żmudnych rachunkach otrzymał autor tego rozwiązania, jest poprawne. Niestety próba uproszczenia wyrażenia stojącego po prawej stronie tego równania nie powiodła się. Kolejna zapisana równość $\frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{6-3\sqrt{3}}} = \frac{(3-\sqrt{3})\sqrt{6-3\sqrt{3}}}{2\sqrt{36-27}}$ jest nieprawdziwa. Wystarczyło np. wciągnąć licznik ułamka pod pierwiastek i zastosować wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy:

$$\frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{6-3\sqrt{3}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(3-\sqrt{3})^2}{6-3\sqrt{3}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{9-6\sqrt{3}+3}{6-3\sqrt{3}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{12-6\sqrt{3}}{6-3\sqrt{3}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2(6-3\sqrt{3})}{6-3\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Niektórzy zdający przyjmowali jako niewiadomą kąt BAD i otrzymywali nawet właściwą wartość funkcji tego kąta. Nie potrafili jednak wyznaczyć jego miary. Z taką sytuacją mamy do czynienia w Przykładzie 25R.

Przykład 25R.



$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$P_{\triangle ADC} = \frac{(a-x) \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a(a-x)\sqrt{3}}{4}$

$P_{\triangle ABD} = \frac{a \cdot x \cdot \sqrt{3}}{4}$

$$\frac{0 \times \sqrt{3}}{10-x) \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\frac{0 \times \sqrt{3}}{(2-x) \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\frac{x}{2-x} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$2x = (\sqrt{3}-1)2 - (\sqrt{3}-1)x$$

$$2x + \sqrt{3}x - x = (\sqrt{3}-1)2$$

$$x(1+\sqrt{3}) = (\sqrt{3}-1)2$$

$$x = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{2}$$

$$x = \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{2}$$

$$* \quad |AD|^2 = 0^2 + \sqrt{3}-1$$

$$\angle B = 60^\circ$$

$$\frac{|AD| \cdot a \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\frac{|AD| \cdot a \cdot \sin \alpha}{|AD| \cdot a \cdot \sin \beta} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin(60^\circ + \alpha)} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin 60^\circ \cos \alpha + \cos 60^\circ \sin \alpha}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin 60^\circ \cos \alpha + \cos 60^\circ \sin \alpha} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$4 \sin \alpha = (\sqrt{3}-1)(\sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha)$$

$$4 \sin \alpha = 3 \cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha$$

$$3 \sin \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha = 3 \cos \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha$$

$$\sin \alpha \cdot *$$

$$* \quad \sin(3+\sqrt{3}) = (3-\sqrt{3}) \cos$$

$$\tan \alpha = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{9+6\sqrt{3}+3}{9-6\sqrt{3}+3} = \frac{12+6\sqrt{3}}{6} = 2+\sqrt{3}$$

$$\tan \alpha = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$$

$$\tan \alpha = \frac{9-6\sqrt{3}+3}{9+6\sqrt{3}+3}$$

$$\tan \alpha = \frac{12-6\sqrt{3}}{12+6\sqrt{3}}$$

$$\text{Odp: } \tan \alpha = 2-\sqrt{3}$$

Maturzysta otrzymał równanie $\operatorname{tg} \alpha = 2 - \sqrt{3}$, w którym α oznacza miarę kąta BAD . Wyznaczenie miary kąta α okazało się zbyt trudne. Zdający mógł próbować oszacować tę miarę. Wystarczyło obliczyć przybliżoną wartość liczby $2 - \sqrt{3}$. Jest to około 0,2679 i odczytać z tablic przybliżoną miarę tego kąta: $\alpha \approx 15^\circ$. To oczywiście nie jest koniec zadania. Należy jeszcze sprawdzić, czy dokładna wartość tangensa 15° jest równa

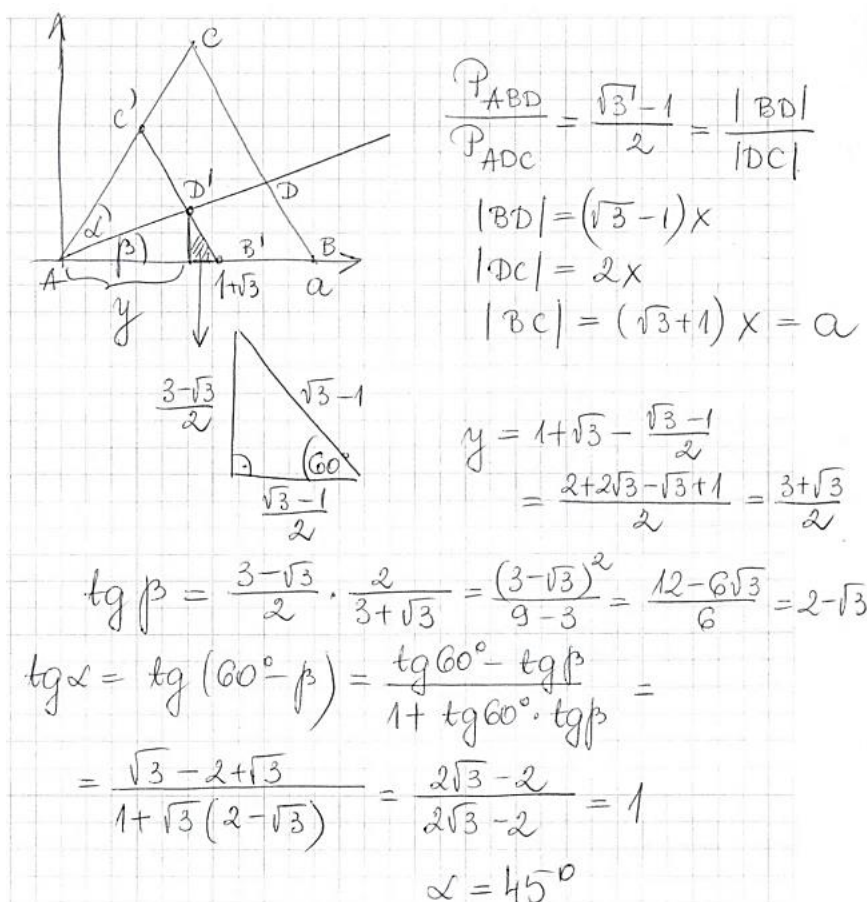
$$2 - \sqrt{3}. \text{ Można to zrobić np. tak: } \operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{(3 - \sqrt{3})^2}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} = \frac{9 - 6\sqrt{3} + 3}{9 - 3} = \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} = 2 - \sqrt{3}. \text{ Zatem } \alpha = 15^\circ. \text{ Stąd } \beta = 60^\circ - \alpha = 45^\circ$$

(oznaczenie β z rozwiązania zdającego).

Występowały także, choć sporadycznie, rozwiązania, w których zdający wykorzystywali aparat geometrii analitycznej. Ten sposób rozwiązania w przypadku tego zadania jest obarczony dosyć uciążliwymi rachunkami, dlatego tylko maturzyści bardzo sprawni rachunkowo dochodzili do końcowego rezultatu. Poniżej Przykład 26R przedstawiający analityczne rozwiązanie tego zadania.

Przykład 26R.

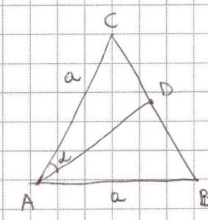


Jednym z powodów tak niskiej wykonalności tego zadania był wspomniany już wcześniej wybór nie do końca odpowiednich narzędzi matematycznych. Nie tylko chodzi o to, że nie miały one zastosowania do rozwiązania tego zadania, co o fakt, że ich zastosowanie skutkowało koniecznością wykonania wielu operacji rachunkowych, najczęściej na pierwiastkach, z którymi maturzyści sobie nie radzili. Ci maturzyści najczęściej zdobywali 1,

rzadziej 2 punkty za rozwiązanie tego zadania. Zaprezentowane wcześniej rozwiązanie w Przykładzie 25R jest dobrą ilustracją tego problemu. Licznej grupie zdających, mimo dobrego pomysłu na rozwiązanie, przeszkodziły zwykle błędy rachunkowe, a niejednokrotnie nawet błędy nieuwagi. Ilustracją takiej sytuacji jest rozwiązanie z Przykładu 27R.

Zdający bardzo sprawnie doszedł do równania trygonometrycznego z niewiadomą α , poprawnie zastosował wzór na sinus różnicy kątów, poprawnie też zapisał wartości sinusa i cosinusa kąta 60° . Niestety mnożąc czynniki po prawej stronie równania, popełnił błąd rachunkowy, choć raczej należy przypuszczać, że błąd ten to efekt nieuwagi, który doprowadził go do równania $\sin \alpha = 0$. Zdający zapisał taką odpowiedź zamiast krytycznie ocenić otrzymany wynik. Wówczas być może spróbowałby sprawdzić swoje rozwiązanie i poszukać błędu.

Przykład 27R.

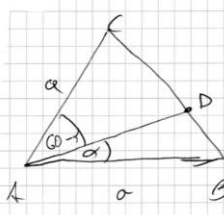


$$\begin{aligned} \frac{P_{\triangle ABD}}{P_{\triangle ADC}} &= \frac{\sqrt{3}-1}{\frac{1}{2}} \\ \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin \alpha}{\frac{1}{2} \cdot AD \cdot AC \cdot \sin(60^\circ - \alpha)} &= \frac{\sqrt{3}-1}{\frac{1}{2}} \\ 2 \sin \alpha &= (\sqrt{3}-1)(\sin(60^\circ - \alpha)) \\ 2 \sin \alpha &= (\sqrt{3}-1)(\sin 60^\circ \cos \alpha - \cos 60^\circ \sin \alpha) \\ 2 \sin \alpha &= (\sqrt{3}-1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha\right) \\ 2 \sin \alpha &= \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}-1}{2} \sin \alpha \\ 2 \sin \alpha &= \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}-1}{2} \sin \alpha \\ 2 \sin \alpha &= \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}-1}{2} \sin \alpha \\ \frac{3+\sqrt{3}}{2} \sin \alpha &= 0 \\ \sin \alpha &= 0 \end{aligned}$$

odp. $\sin \alpha = 0$

Podobne rozwiązanie, lecz z innym zakończeniem, możemy zobaczyć w Przykładzie 27R.

Przykład 27R.



$$\begin{aligned} \frac{[ABD]}{[ADC]} &= \frac{\sqrt{3}-1}{\frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2} a \cdot AD \sin \alpha}{\frac{1}{2} a \cdot AD \sin(60^\circ - \alpha)} &= \frac{\sqrt{3}-1}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \\ \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin(60^\circ - \alpha)} &= \frac{\sqrt{3}-1}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 \sin \alpha &= (\sqrt{3}-1)(\sin 60^\circ \cos \alpha - \cos 60^\circ \sin \alpha) \\ 2 \sin \alpha &= (\sqrt{3}-1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha\right) \\ 2 \sin \alpha &= \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}-1}{2} \sin \alpha \\ \left(2 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) \sin \alpha &= \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) \cos \alpha \\ \left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right) \sin \alpha &= \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) \cos \alpha \\ \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} &= \frac{\sqrt{3}-1}{3+\sqrt{3}} = \frac{(3-\sqrt{3})^2}{9-3} = \frac{9-6\sqrt{3}+3}{6} \\ \Rightarrow \tan \alpha &= \frac{12-6\sqrt{3}}{6} = 2-\sqrt{3} \approx 0,2649 \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha &= 15^\circ \end{aligned}$$

Autor tego rozwiązania oznaczył literą α miarę kąta BAD . Wtedy szukany kąt DAC ma miarę $60^\circ - \alpha$. Wnioskując z zapisanej odpowiedzi, maturzysta już o tym nie pamiętał. Zdający nie popełnił żadnego błędu rachunkowego. Otrzymał poprawne równanie $\operatorname{tg} \alpha = 2 - \sqrt{3}$. Nawet zapisana przybliżona wartość liczby $2 - \sqrt{3}$ jest poprawna. Zdający nie uzasadnił jednak, że kąt α ma dokładnie 15° . Tych kłopotów można było uniknąć, oznaczając jakąś literą miarę szukanego kąta. Wtedy otrzymalibyśmy tangens równy 1, skąd wnioskowalibyśmy, że miara szukanego kąta to 45° .

Jednym z elementów rozwiązania tego zadania, za który zdający mogli otrzymać 1 punkt, było zapisanie, że stosunek długości odcinków BD i CD jest równy $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Wniosek ten jest natychmiastowy, o ile zauważymy, że trójkąty ABD i ACD mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka A . Maturzyści w większości z tego nie korzystali (część w nich prawdopodobnie w ogóle tego nie zauważyła), wykorzystywali natomiast wzór na pole trójkąta z sinusem i wtedy najczęściej dochodzili do tego samego rezultatu. Nie wszystkim jednak zastosowanie tego wzoru pozwoliło uzyskać ten wynik. Nie udało się to autorowi rozwiązania przedstawionego w Przykładzie 28R. Zdający zauważył, że czynniki $\frac{1}{2}$ i $\sin 60^\circ$ występujące w liczniku i mianowniku otrzymanego stosunku pól skrócą się i tę część obliczeń wykonał w pamięci, nie zauważając jednocześnie, że skróci się również czynnik a , który także występuje w liczniku i w mianowniku. W rezultacie zdający otrzymał poprawną zależność $2ax = (\sqrt{3} - 1)(a^2 - x)$ między wielkościami a i x , którą potem skreślił. Nie jest to jednak zależność liniowa.

Przykład 28R.

Diagram of triangle ABC with side $AC = a$. Point D lies on BC such that $AD = x$ and $CD = a - x$. The angle at vertex A is 60° .

Area calculations:

$$\frac{P_{ABD}}{P_{ADC}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$d = ?$$

$$P_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot a \cdot \sin 60^\circ$$

$$P_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot a(a-x) \sin 60^\circ$$

$$\frac{P_{ABD}}{P_{ADC}} = \frac{x \cdot a}{a(a-x)} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$2ax = (\sqrt{3}-1)(a^2 - x)$$

$$2ax = \sqrt{3}a^2 - \sqrt{3}ax + a^2 + a^2 - x \quad | :a > 0$$

$$\sqrt{3}a^2 - \sqrt{3}ax$$

$$2x = \sqrt{3}a - \sqrt{3}x + a + x$$

$$2x + \sqrt{3}x =$$

Zadania, z którymi zdający poradzili sobie najlepiej

Tegoroczni maturzyści na poziomie rozszerzonym najlepiej opanowali umiejętności:

- posługiwania się funkcją wykładniczą do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi
- rozwiązywania nierówności z wartością bezwzględną
- rozpoznawania szeregów geometrycznych zbieżnych i obliczania ich sum
- obliczania pochodnej funkcji z wykorzystaniem wzoru na pochodną ilorazu oraz zastosowania pochodnej do rozwiązania zadania optymalizacyjnego.

Najłatwiejszym zadaniem w arkuszu dla poziomu rozszerzonego (poziom wykonania – 78 %) okazało się **zadanie 1**. W treści zadania opisane zostało zjawisko wzrostu liczebności N populacji pewnego gatunku bakterii, podany został wzór $N(t) = N_0 \cdot k^t$ funkcji N zmiennej t , objaśnione zostały wszystkie wielkości występujące w tym wzorze, wreszcie podana została liczebność populacji w momencie rozpoczęcia obserwacji i liczebność tej populacji po dwóch godzinach od chwili rozpoczęcia obserwacji. Zadaniem maturzysty było obliczenie o ile procent wzrastała liczebność rozpatrywanej populacji w ciągu każdej godziny obserwacji. To zadanie było oceniane w skali 0 – 2 punkty.

Drugim z najłatwiejszych zadań tegorocznego egzaminu na poziomie rozszerzonym okazało się **zadanie 5**. Poziom wykonalności tego zadania był już znacznie niższy od poziomu wykonalności zadania 1. i wyniósł 60 %. Zadanie 5. polegało na rozwiązaniu nierówności z wartością bezwzględną z jedną niewiadomą. Za rozwiązanie tego zadania maturzysta mógł otrzymać maksymalnie 4 punkty.

Trzecim z kolei najłatwiejszym zadaniem okazało się **zadanie 6**. (poziom wykonania – 53 %) Zadanie dotyczyło nieskończonego ciągu geometrycznego, w którym dana była suma pierwszego i trzeciego wyrazu oraz suma kwadratów tych wyrazów. Należało obliczyć sumę wszystkich wyrazów tego ciągu. Podobnie jak poprzednio maturzysta mógł za rozwiązanie tego zadania otrzymać maksymalnie 4 punkty.

Omówimy te zadania, ilustrując je przykładami rozwiązań maturzystów.

Rozwiązanie zadania 1. wymagało od maturzysty poprawnej interpretacji danych.

W szczególności musiał on poprawnie zinterpretować zdanie: W chwili rozpoczęcia obserwacji liczebność populacji była równa 10 000, a po dwóch godzinach była równa 15 625. Informacja ta wyrażona w postaci odpowiednich równań ma postać

$N(0) = 10\,000$, ale $N(0) = N_0 \cdot k^0 = N_0$, więc $N_0 = 10\,000$ oraz $N(2) = 15\,625$, więc $15\,625 = 10\,000 \cdot k^2$.

Wartość dodatniej podstawy k jest zatem równa

$$k = \sqrt{\frac{15625}{10000}} = 1,25$$

Teraz pozostaje tylko poprawnie zinterpretować otrzymany wynik i zapisać odpowiedź:

Liczebność populacji tej bakterii w ciągu każdej godziny wzrastała o 25 %.

Przykłady 29R i 30R ilustrują pełne rozwiązania.

Przykład 29R.

$$\begin{aligned}
 N(0) &= 10000 & 10000 &= N_0 \cdot k^0 & N_0 &= 10000 \\
 N(2) &= 15625 & 15625 &= 10000 \cdot k^2 & k > 0 \\
 & & k^2 &= 1,5625 & k &= 1,25 \vee k = -1,25 \\
 N(t) &= 10000 \cdot 1,25^t \\
 N(1) &= 12500 & \text{Liczba o 2500 czyli o 25\%.} \\
 & & \frac{12500}{10000} &= 1,25 & & \frac{2500}{10000} = 25\% \\
 & & \text{Odp. W ciągu każdej godziny liczebność populacji} \\
 & & \text{rośnie o 25\% w ciągu każdej godziny}
 \end{aligned}$$

Przykład 30R.

$$\begin{aligned}
 15625 &= 10000 k^2 \quad / : 10000 \\
 k^2 &= \frac{15625}{10000} = \frac{125}{80} = \frac{25}{16} \\
 k &= \frac{5}{4} & k &= -\frac{5}{4} \text{ sprzeczne, bo } k > 0 \\
 N(1) &= 10000 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^1 = 12500 \\
 \frac{N(1)}{N(0)} &= \frac{12500}{10000} \cdot 100\% = 125\% & \frac{N(2)}{N(1)} &= \frac{15625}{12500} \cdot 100\% = 125\% \\
 \text{Odp. Liczebność tej populacji bakterii w ciągu każdej godziny wzrasta o } \underline{25\%}
 \end{aligned}$$

Ci zdający, którzy poprawnie interpretowali dane, ale nie otrzymywali maksymalnej liczby punktów, najczęściej poprawnie obliczali wartość k . Niektórzy, tak jak w Przykładzie 31R, błędnie interpretowali otrzymany wynik.

Przykład 31R.

$$\begin{aligned}
 N_{(0)} &= N_0 \cdot k^0 \\
 N_0 &= 10 \text{ (w)} \\
 N_{(2)} &= N_0 \cdot k^2 \\
 N_0 \cdot k^2 &= 15625 \\
 k^2 &= \frac{15625}{N_0} = \frac{15625}{10000} \\
 k &= \frac{125}{100} = 1,25 \\
 \frac{N(1)}{N(0)} &= \frac{N_0 \cdot k^1}{N_0 \cdot k^0} = k = 1,25 = \underline{125\%} \\
 \text{Odp. Liczebność populacji bakterii wzrasta o 125\% w ciągu} \\
 & \text{każdej godziny.}
 \end{aligned}$$

Inni, jak zdający z Przykładu 32R, popełniali proste błędy rachunkowe.

Przykład 32R.

$$\begin{aligned}
 N(0) &= 10000 \cdot k^0 \\
 N(0) &= 10000 \\
 N(2) &= 10000 \cdot k^2 = 15625 \\
 10000 k^2 &= 15625 \\
 k^2 &= \frac{15625}{10000} \\
 k &= \frac{125}{100} = 0,125 \rightarrow 12,5\%
 \end{aligned}$$

W ciągu każdej godziny
krotność populacji
zwiększa się o 12,5%.

Jeszcze inni, jak zdający z Przykładu 33R, nie widzieli, że z obliczonej wartości $k = 1,25$ natychmiast otrzymujemy odpowiedź.

Przykład 33R.

$$\begin{aligned}
 N_0 &= 10\,000 \\
 t &= 2 \rightarrow 15625 \\
 N(t) &= N_0 \cdot k^t \\
 N(2) &= 10\,000 \cdot k^2 \\
 15625 &= 10\,000 \cdot k^2 \\
 k^2 &= 1,5625 \\
 k &= 1,25 \quad k > 0 \\
 N(1) &= 10\,000 \cdot (1,25)^1 \\
 N(1) &= 12500 \\
 \frac{12500}{15625} &= 0,8 \\
 \text{Odp: Wzrost} &\text{ o } 80\% \text{ każdej godziny}
 \end{aligned}$$

Zdający, którzy nie otrzymali żadnego punktu za rozwiązanie tego zadania, najczęściej nie obliczali wartości k (Przykład 33R) albo niepoprawnie interpretowali dane zadania.

Przykład 33R.

Dla

$$\begin{aligned}
 N(0) &= N_0 \\
 N(1) &= N_0 \cdot k = 10\,000 \\
 N(2) &= N_0 k^2 = 15\,625
 \end{aligned}$$

W ciągu godziny liczebność ~~was~~ wzrosła o 10000, a po dwóch god. godzinach populacja wzrosła o 5625, tzn 75^2 . Wobec tego zliczyliśmy wzrost o 7,5%, gdzie po następnych godzinach będzie on wynosił odpowiednio $75^3, 75^4, \dots$

Przejdźmy teraz do drugiego z najłatwiejszych zadań, jakim jest zadanie 5.

Zdający miał za zadanie rozwiązać nierówność $|x - 2| - 2 \cdot |x + 3| < -2$.

Nierówność tę można rozwiązać na wiele sposobów, jednak w zdecydowanej większości maturzyści rozwiązywali ją następująco:

- dzielili zbiór $\mathbb{R}$ na trzy rozłączne przedziały: $(-\infty, -3)$, $[-3, 2)$, $[2, +\infty)$,
- w każdym z tych przedziałów zapisywali nierówność bez użycia symbolu wartości bezwzględnej oraz rozwiązywali otrzymaną nierówność liniową z jedną niewiadomą,
- wyznaczali wszystkie rozwiązania nierówności w każdym z tych przedziałów,
- wyznaczali sumę otrzymanych zbiorów rozwiązań w poszczególnych przedziałach.

Przykład 34R przedstawia takie rozwiązanie. Zdający zrealizował je bezbłędnie.

Przykład 34R.

$|x-2| - 2|x+3| < -2$

$x-2=0 \Rightarrow x=2$ $x+3=0 \Rightarrow x=-3$

I dla $x \in (-\infty, -3)$ II $x \in [-3, 2)$ III $x \in [2, +\infty)$

I $-(x-2) + 2(x+3) < -2$ II $-(x-2) - 2(x+3) < -2$ III $(x-2) - 2(x+3) < -2$

$-x+2+2x+6 < -2$ $-x+2-2x-6 < -2$ $x-2-2x-6 < -2$

$x+10 < -2$ $-3x-4 < -2$ $-x-6 < -2$

$x < -12$ $-3x < 2$ $-x < 4$

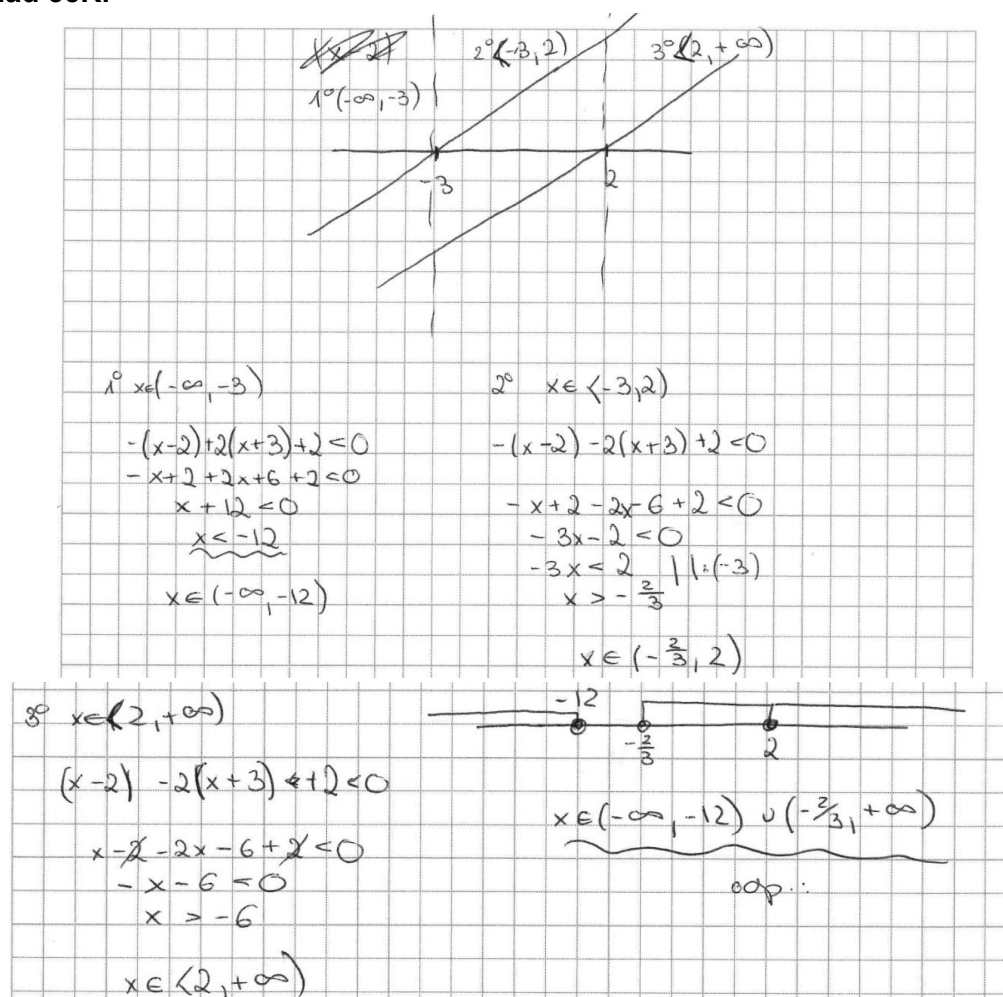
$x < -12$ $x > -\frac{2}{3}$ $x < 4$

$x < -10$ $x \in (-\frac{2}{3}, 2)$ $x \in [2, +\infty)$

Odp. $x \in (-\infty, -10) \cup (-\frac{2}{3}, +\infty)$

W dużej części prac pojawiały się błędy rachunkowe, które skutkowały przyznaniem mniejszej niż maksymalna liczby punktów. Nadal jednak w tych pracach widać poprawną realizację tej metody rozwiązania. W Przykładzie 35R mamy do czynienia z taką sytuacją. Jedyne błędy, jakie popełnił ten zdający, to błąd rachunkowy w pierwszym rozpatrywanym przedziale. Zdający zapisał $x + 12 < 0$ zamiast $x + 10 < 0$.

Przykład 35R.



W następnym Przykładzie 36R zdający popełnił dwa błędy i oba te błędy są merytoryczne. Pierwszy błąd to wyznaczenie niepoprawnego zbioru rozwiązań nierówności w drugim z rozpatrywanych przedziałów. Zdający zapisał $x \in (-3, -\frac{2}{3})$ zamiast $x \in (-\frac{2}{3}, 2)$. Drugi błąd, w którym zdający zamiast zsumować otrzymane przedziały, wyznaczył ich iloczyn, który w tym przypadku jest zbiorem pustym, może oznaczać, że autor rozwiązania nie do końca rozumie obraną przez siebie metodę rozwiązania.

Przykład 36R.

$|x-2| - 2|x+3| < -2$
 $x = 2$
 $x = -3$

1. $x \in (-\infty; -3)$
 $-(x-2) + 2(x+3) < -2$
 $-x+2+2x+6 < -2$
 $x+8 < -2$
 $x < -10$

$x \in (-\infty; -10)$

2. $x \in [-3; 2)$
 $-(x-2) - 2(x+3) < -2$
 $-x+2-2x-6 < -2$
 $-3x-4 < -2$
 $-3x < 2$
 $x > -2/3$

$x \in (-3; -2/3)$

3. $x \in [2; +\infty)$
 $x-2-2(x+3) < -2$
 $x-2-2x-6 < -2$
 $-x-8 < -2$
 $-x < 6$
 $x > -6$

$x \in [2; +\infty)$

$x \in \emptyset$

Strona 11 z 29

Kolejną grupę rozwiązań stanowią te, w których zdający poprawnie rozważają nierówność w trzech przedziałach, poprawnie opuszczają w każdym z tych przedziałów symbole wartości bezwzględnej, poprawnie też rozwiązują otrzymane nierówności liniowe. Nie wyznaczają jednak poprawnych zbiorów rozwiązań rozpatrywanych nierówności w poszczególnych przedziałach. Należy tu dodać, że stwierdzenie tego błędu jest niekiedy oczywiste, a niekiedy trudne. Przyjrzyjmy się trzem przykładom: 37R, 38R i 39R. Pobieźny ogląd rozwiązania z Przykładu 37R może prowadzić do wniosku, że nierówność jest rozwiązana poprawnie. Autor tego rozwiązania otrzymał nawet poprawny wynik końcowy. Dokładna analiza rozwiązania pokazuje jednak, że wynik ten jest efektem błędów merytorycznych, jakie maturzysta popełnił, rozpatrując nierówność w przedziale $[-3, 2)$ oraz w przedziale $[2, +\infty)$. Zbiorem rozwiązań rozpatrywanej w pierwszym przedziale nierówności nie jest wyznaczony przez zdającego przedział $[-\frac{2}{3}, +\infty)$. W drugim rozpatrywanym przedziale zdający zapisał: $x > -6 \notin D$, co najprawdopodobniej ma oznaczać, że liczba -6 nie należy do rozpatrywanego przedziału, a być może oznacza, że zbiorem rozwiązań nierówności w tym przedziale jest zbiór pusty.

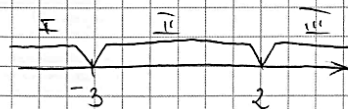
Przykład 37R.

$$|x-2| - 2 \cdot |x+3| < -2$$

$$|x-2| - 2 \cdot |x+3| + 2 < 0$$

$$x=2$$

$$x=-3$$



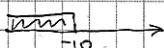
$$① \quad x \in (-\infty, -3)$$

$$-x+2-2(-x-3)+2 < 0$$

$$-x+2+2x+6+2 < 0$$

$$x+10 < 0$$

$$x < -10$$



$$x \in (-\infty, -10)$$

$$② \quad x \in [-3; 2)$$

$$-x+2-2(x+3)+2 < 0$$

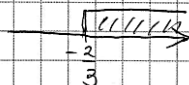
$$-x+2-2x-6+2 < 0$$

$$-3x-2 < 0$$

$$-3x < 2$$

$$3x > -2$$

$$x > -\frac{2}{3}$$



$$x \in \left[-\frac{2}{3}; +\infty\right)$$

$$③ \quad x \in [2; +\infty)$$

$$x-2-2(x+3)+2 < 0$$

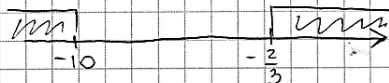
$$x-2-2x-6+2 < 0$$

$$-x-6 < 0$$

$$-x < 6$$

$$x > -6$$

$$x > -6 \quad \& \; \mathbb{D}$$



$$x \in (-\infty, -10) \cup \left[-\frac{2}{3}, +\infty\right)$$

Z kolei pobieżny ogląd rozwiązania z Przykładu 39R wskazuje, że zdający w ogóle nie wyznacza części wspólnych otrzymanych w rozpatrywanych przedziałach zbiorów rozwiązań nierówności z tymi przedziałami.

Przykład 39R.

$$|x-2| - 2 \cdot |x+3| < -2$$

$$x-2 \geq 0 \vee -x+2 > 0 \quad x+3 > 0 \vee -x-3 > 0$$

$$\begin{matrix} x \geq 2 \\ (x-2) \end{matrix} \vee \begin{matrix} x < 2 \\ (-x+2) \end{matrix} \quad \begin{matrix} x > -3 \\ (x+3) \end{matrix} \vee \begin{matrix} x < -3 \\ (-x-3) \end{matrix}$$

$$\text{I } x \in (-\infty, -3) \quad \text{II } x \in (-3, 2)$$

$$-x+2 - 2 \cdot (-x-3) < -2 \quad -x+2 - 2 \cdot (x+3) < -2$$

$$-x+2+2x+6 < -2 \quad -x+2-2x-6 < -2$$

$$x+10 < 0 \quad -3x < 2$$

$$x < -10 \in D \quad x > -\frac{2}{3} \in D$$

$$\text{III } x \in (2, \infty)$$

$$x-2 - 2 \cdot (x+3) < -2$$

$$x-2-2x-6 < -2$$

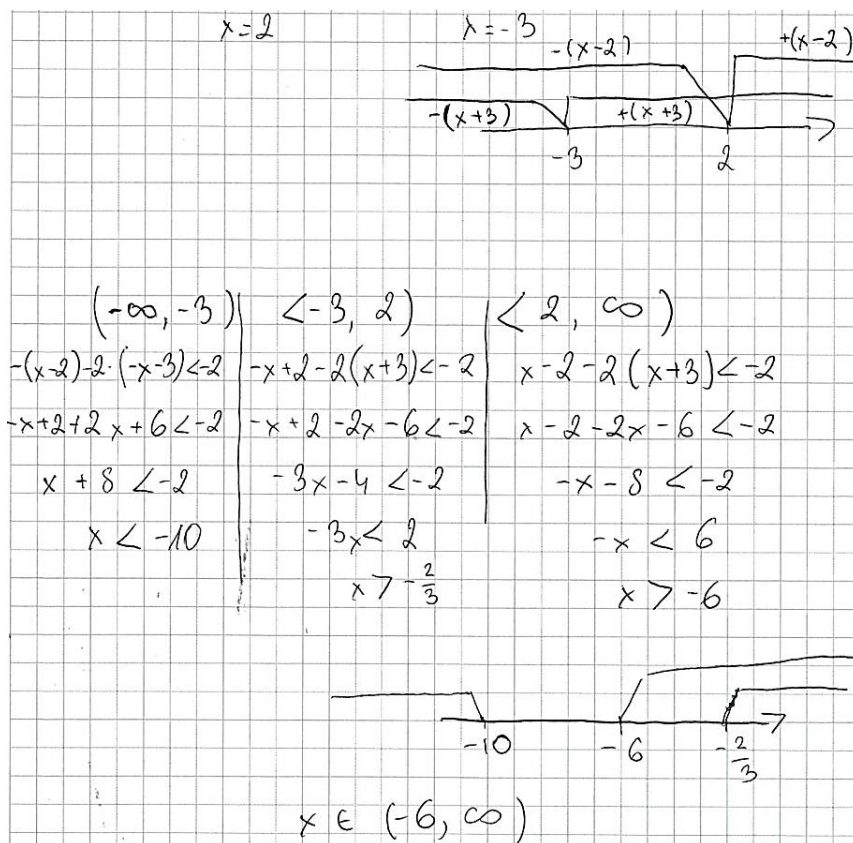
$$-x < 6$$

$$x > -6 \in D$$

$$\text{Odp: } x \in (-\infty, -10) \cup (-\frac{3}{2}, 2) \cup (6, \infty)$$

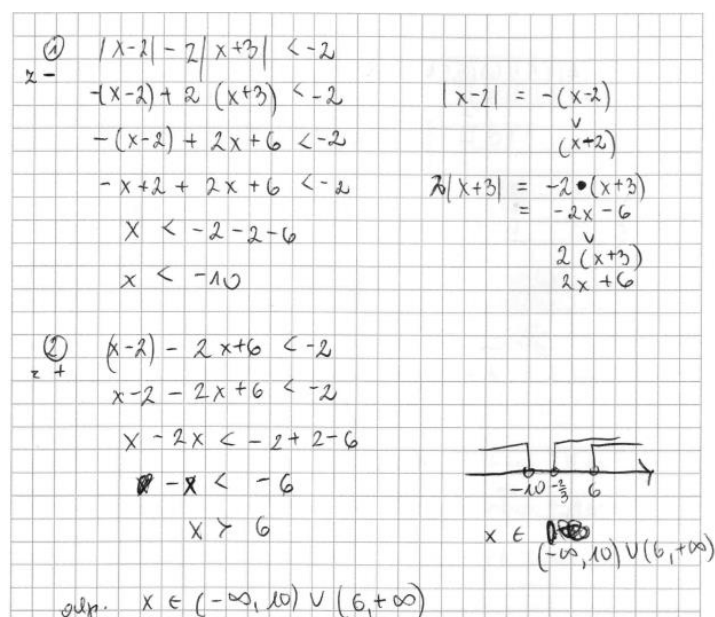
Jest to jednak nieprawda, o czym świadczy wyznaczona na końcu rozwiązania suma przedziałów. Pomijając błąd rachunkowy, jaki zdający zrobił w ostatnim z rozpatrywanych przedziałów (zamiast $x > -6$ zapisał $x > 6$), to drugi przedział wyznaczonej przez zdającego sumy $(-\infty, -10) \cup (-\frac{3}{2}, 2) \cup (6, +\infty)$ wskazuje, że zdający jednak wyznaczył zbiory rozwiązań nierówności w poszczególnych przedziałach. Opisany wyżej błąd jest natomiast widoczny w rozwiązaniu z Przykładu 39R.

Przykład 39R.



Przejdźmy do znacznie rzadziej występujących metod rozwiązywania. Jedną z takich metod jest rozpatrywanie przypadków ze względu na wszystkie możliwe kombinacje znaków wyrażeń pod modułami. W przypadku nierówności z dwoma modułami oznacza to konieczność rozpatrzenia czterech przypadków. Metoda ta w przypadku nierówności z trzema modułami prowadzi do rozpatrzenia ośmiu przypadków, jest więc wtedy nieekonomiczna. Przykład 40R to próba realizacji takiej metody rozwiązywania. Niestety zupełnie nieudanej.

Przykład 40R.



$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad & -(x-2) - 2(x+3) < -2 \\ & -x+2 - 2x-6 < -2 \\ & -3x < -2-2+6 \\ & -3x < 2 \\ & x > -\frac{2}{3} \end{aligned} \qquad \textcircled{4} \quad x-2-2(x+3) < -2$$

Kolejna z algebraicznych metod rozwiązania nierówności modułowej opiera się na dwóch równoważnościach

$$|x| < a \Leftrightarrow x > -a \wedge x < a \text{ oraz } |x| > a \Leftrightarrow x < -a \vee x > a,$$

które są prawdziwe dla dowolnych liczb rzeczywistych x i a .

Zastosowanie tej metody wymaga rozumienia struktury logicznej dokonywanych zapisów, co dla wielu uczniów, nawet dobrych, jest trudne.

Przykład 41R pokazuje rozwiązanie tą metodą.

Przykład 41R.

$$|x-2| < 2|x+3|-2$$

$$x-2 < 2|x+3|-2 \quad \text{if} \quad x-2 > -2|x+3|+2$$

$$2|x+3| \geq x \quad \text{if} \quad 2|x+3| > 4-x$$

$$|2x+6| > x \quad \text{if} \quad |2x+6| > 4-x$$

$$(2x+6 > x \text{ lub } 2x+6 < -x) \text{ if } (2x+6 > 4-x \text{ lub } 2x+6 < -4)$$

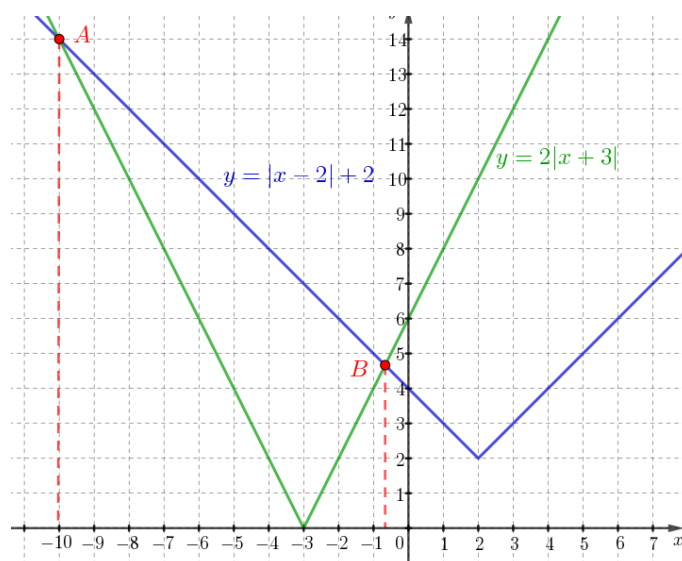
$$(x > -6 \text{ lub } x < -2) \text{ if } (x > -\frac{2}{3} \text{ lub } x < -10)$$

$x \in \mathbb{R}$

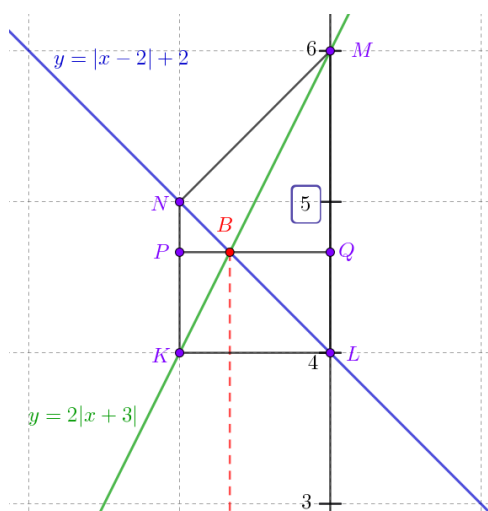
$x \in (-\infty, -10) \cup (-\frac{2}{3}, \infty)$

$x \in (-\infty, -10) \cup (-\frac{2}{3}, \infty)$

Ostatnia z metod, którą tu zaprezentujemy, to metoda graficzna. Polega ona na zbadaniu wzajemnego położenia wykresów dwóch funkcji określonych na zbiorze $\mathbb{R}$ i opisanych wzorami, w których występują symbole wartości bezwzględnej. Wygodnie jest przy tym zapisać najpierw nierówność w postaci równoważnej, np. $|x - 2| + 2 < 2|x + 3|$ i dalej rozważać funkcje $f(x) = |x - 2| + 2$ i $g(x) = 2|x + 3|$. Wygodniej dlatego, że wykresy obu tych funkcji można łatwo otrzymać, wykonując znane przekształcenia geometryczne wykresów funkcji liniowych. Wykres funkcji f otrzymujemy, przekształcając odpowiednio prostą o równaniu $y = x - 2$. Podobnie, odpowiednio przekształcając prostą o równaniu $y = x + 3$, otrzymujemy wykres funkcji g . Wykresy funkcji f i g rysujemy w tym samym układzie współrzędnych.



Teraz wystarczy ustalić odcięte punktów A i B przecięcia tych wykresów. O ile odczytanie odciętej punktu kratowego A jest natychmiastowe: $x_A = -10$, to odczytanie współrzędnych punktu B może być kłopotliwe. Można to jednak zrobić, wykorzystując punkty kratowe $K = (-1, 4)$, $L = (0, 4)$, $M = (0, 6)$, $N = (-1, 5)$. Punkty K i M leżą na wykresie funkcji g , a punkty L i N na wykresie funkcji f .



Wystarczy teraz tylko zauważyć, że trójkąt LMB jest podobny do trójkąta NKB , a skala tego podobieństwa jest równa $\frac{|LM|}{|KN|} = 2$. Stąd wynika, że $|BQ| = \frac{2}{3}|PQ| = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$. Wobec tego odcięta punktu B jest równa $x_B = -\frac{2}{3}$, a w konsekwencji rozwiązaniem nierówności $f(x) < g(x)$ jest każda liczba $x \in (-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (-\frac{2}{3}, +\infty)$.

Metodę graficzną wykorzystał zdający z Przykładu 42R. Zdający ten rozważył funkcję $f(x) = |x - 2| - 2|x + 3|$ oraz funkcję stałą $g(x) = -2$. Przed narysowaniem wykresu funkcji f zdający zapisał jej wzór bez użycia modułów.

Przykład 42R.

Korzystamy z funkcji moduł w potęgach, którą zapiszemy w postaci
 $f(x) = |x-2| - 2|x+3|$.

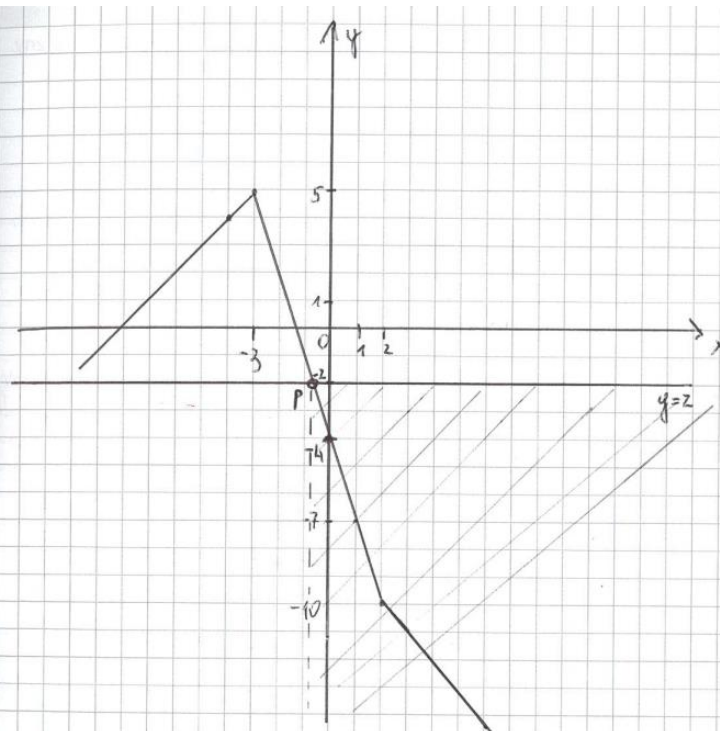
Z definicji wartości bezwzględnej sprawdzamy, w których punktach funkcja zmienia znak, tzn.

$$f(x) = \begin{cases} -(x-2) - 2 \cdot [-(x+3)] & \text{dla } x < -3 \\ -(x-2) - 2 \cdot (x+3) & \text{dla } -3 \leq x < 2 \\ x-2 - 2(x+3) & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$$

po przekształceniach

$$f(x) = \begin{cases} x+8 & \text{dla } x < -3 \\ -3x-4 & \text{dla } -3 \leq x < 2 \\ -x-8 & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$$

Szczególny wykres funkcji oraz prostej $y = -2$



Obszar zakreślony odpowiada rozwiązaniu wyjątkowej nierówności, natomiast punkt P obliczamy z równości

$$-3x - 4 = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}, \text{ czyli } P(-\frac{2}{3}, -2).$$

Ostatecznym rozwiązaniem jest $x > -\frac{2}{3}$.

Zdający nie uzyskał jednak poprawnego rozwiązania, gdyż nie zauważył, że wykresy tych funkcji mają dwa punkty wspólne.

Ostatnim z trzech najłatwiejszych zadań tegorocznego egzaminu, które omówimy, będzie **zadanie 6**. Rozwiązanie tego zadania składało się z dwóch etapów. Pierwszy etap polegał na wyznaczeniu wszystkich ciągów geometrycznych spełniających podane w treści zadania warunki: $a_1 + a_3 = 20$ i $a_1^2 + a_3^2 = 328$, gdzie a_1 i a_3 to pierwszy i trzeci wyraz nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) . W drugim etapie rozwiązania zdający musiał obliczyć sumę wszystkich wyrazów wyznaczonego ciągu, ale tylko w tych przypadkach, w których suma ta była skończona.

Pierwszy etap zdający realizowali na różne sposoby. Jedni rozwiązywali podany w treści zadania układ równań z niewiadomymi a_1 i a_3 . Stąd otrzymywali równanie kwadratowe z jedną niewiadomą a_1 lub a_3 . Dalsza część rozwiązania przebiegała różnie, ale najczęściej, po obliczeniu pierwszego (lub trzeciego) wyrazu ciągu, zdający wyznaczali możliwe ilorazy ciągu, odrzucając te, dla których nie istnieje skończona suma szeregu geometrycznego. Przykład 43R przedstawia taką właśnie sytuację.

Przykład 43R.

$$\begin{cases} a_1 + a_1 q^2 = 20 \\ a_1^2 + (a_1 q^2)^2 = 328 \end{cases} \quad |q| < 1$$

$$a_1^2 + a_1^2 q^4 = 328$$

$$a_1^2 (1 + q^4) = 328$$

$$a_1 (1 + q) \quad \text{---}$$

$$s_n = \frac{a_1}{1-q}$$

$$q < 1 \quad \vee \quad q > -1$$

$$\begin{cases} a_1 q^2 = 20 - a_1 \\ a_1^2 + (20 - a_1)^2 = 328 \end{cases} \quad \mathcal{D}: q \in (-1, 1)$$

$$a_1^2 + 400 - 40a_1 + a_1^2 - 328 = 0$$

$$2a_1^2 - 40a_1 + 72 = 0 \quad | :2$$

$$a_1^2 - 20a_1 + 36 = 0$$

$$\Delta = 400 - 144 = 256$$

$$a_1 = \frac{20 - 16}{2} = 2$$

$$a_3 = \frac{36}{2} = 18$$

dla $a_1 = 2$ ~~$q \neq$~~ $q =$:

$$2q^2 = 18$$

$$q^2 = 9$$

$$q = 4 \quad \vee \quad q = -4$$

$$\notin \mathcal{D} \quad \notin \mathcal{D}$$

$$2q^2 = 18 \quad | : \frac{1}{2}$$

$$q^2 = 9$$

$$q = 3 \quad \vee \quad q = -3$$

$$\notin \mathcal{D} \quad \notin \mathcal{D}$$

dla $a_1 = 18$
 ~~$18q^2 = 2$~~
 $q^2 = \frac{1}{9}$
 $\underline{\text{I}} \quad q = \frac{1}{3} \in \mathbb{D} \quad \vee \quad q = -\frac{1}{3} \in \mathbb{D}$

I przypadek
 $S_n = \frac{18}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{18}{\frac{2}{3}} = \frac{9}{\frac{2}{3}} = 18 \cdot \frac{3}{2} = \underline{\underline{27}}$

II przypadek
 $S_n = \frac{18}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{18}{\frac{4}{3}} = \frac{9}{\frac{4}{3}} = 18 \cdot \frac{3}{4} = \underline{\underline{\frac{27}{2}}}$

Inna grupa zdających od razu wykorzystywała wzór ogólny ciągu geometrycznego, otrzymując najpierw układ równań z dwiema niewiadomymi a_1 i q , z którego następnie otrzymywali równanie wielomianowe z jedną niewiadomą q . Ten sposób rozwiązania występował najczęściej. Dobrze ilustruje to Przykład 44R.

Przykład 44R.

$a_1 + a_3 = 20 \quad a_1^2 + a_3^2 = 328$
 $a + aq^2 = 20 \quad a^2 + (aq^2)^2 = 328$
 $a(1 + q^2) = 20 \quad \left(\frac{20}{1+q^2}\right)^2 + \left(\frac{20}{1+q^2}\right)^2 \cdot q^4 = 328$
 $a = \frac{20}{(1+q^2)} \quad \frac{400}{(1+q^2)^2} + \frac{400q^4}{(1+q^2)^2} = 328 \quad | \cdot (1+q^2)^2$

— dla $q = \frac{1}{3}$ —
 $a = \frac{20}{1 + \frac{1}{9}} = \frac{20}{\frac{10}{9}} = 20 \cdot \frac{9}{10} = 18$
 $S_n = \frac{18}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{18}{\frac{2}{3}} = \frac{18 \cdot 3}{2} = 27$

— dla $q = -\frac{1}{3}$ —
 $a = \frac{20}{1 + \frac{1}{9}} = 18$
 $S_n = \frac{18}{1 - (-\frac{1}{3})} = \frac{18}{\frac{2}{3}} = 27$

$400 + 400q^4 = 328(1+q^2)^2$
 $400 + 400q^4 = 328(1 + 2q^2 + q^4)$
 $400 + 400q^4 - 328 - 656q^2 - 328q^4 = 0$
 $72q^4 - 656q^2 + 72 = 0$
 $18q^4 - 164q^2 + 18 = 0$
 $9q^4 - 82q^2 + 9 = 0 \quad q^4 = x^2; q^2 = x$
 $9x^2 - 82x + 9 = 0 \quad x \geq 0$
 $\Delta = 6724 - 324 = 6400 \quad \sqrt{\Delta} = 80$
 $x_1 = \frac{82 - 80}{18} = \frac{1}{9}$
 $x_2 = \frac{82 + 80}{18} = 9$

odp. suma wszystkich wyrazów tego ciągu dla $q = \frac{1}{3}$ jest równa 27; a dla $q = -\frac{1}{3}$ jest równa $\frac{27}{2}$.
 $|q| < 1$, więc $q = \frac{1}{3} \vee q = -\frac{1}{3}$

W rozwiązaniu tym warto zwrócić uwagę na to, że po uzyskaniu równania dwukwadratowego $72q^4 - 656q^2 + 72 = 0$ maturzysta nie zaczął mechanicznie stosować algorytmu rozwiązywania równania kwadratowego, ale podzielił obie strony równania przez 4, a potem jeszcze obie strony otrzymanego równania przez 2. To pozwoliło mu znacznie uprościć rachunki. Niestety, nie wszyscy maturzyści tak postępują, co możemy zaobserwować w poprawnym rozwiązaniu z Przykładu 45R.

Przykład 45R.

$$\begin{cases} a_1 + a_1 q^2 = 20 \\ a_1^2 + a_1^2 q^4 = 328 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 20 - a_1 q^2 \\ a_1^2 + a_1^2 q^4 = 328 \end{cases}$$

$$a_1(1 + q^2) = 20$$

$$a_1 = \frac{20}{1 + q^2}$$

$$\left(\frac{20}{1 + q^2}\right)^2 + \left(\frac{20}{1 + q^2}\right)^2 q^4 = 328$$

$$\frac{400}{q^4 + 2q^2 + 1} + \frac{400q^4}{q^4 + 2q^2 + 1} = 328$$

$$400 + 400q^4 - 328q^4 - 656q^2 - 328 = 0$$

$$72q^4 - 656q^2 + 72 = 0$$

$$72t^2 - 656t + 72 = 0$$

$$\Delta = 436736 - 409600$$

$$\sqrt{\Delta} = 640$$

$$t_1 = \frac{656 + 640}{72 \cdot 2} = 9$$

$$t_2 = \frac{656 - 640}{72 \cdot 2} = \frac{16}{72} = \frac{2}{9}$$

$$q = -3 \text{ lub } q = 3$$

$$q = -\frac{1}{3} \text{ lub } q = \frac{1}{3}$$

$$\text{dla } q = -3$$

$$\begin{cases} q = -3 \\ a_1 = 18 \\ s_n = \frac{18}{-3} = -6 \end{cases}$$

$$\text{dla } q = \frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} q = \frac{1}{3} \\ a_1 = 18 \\ s_n = \frac{18}{\frac{1}{3}} = 54 \end{cases}$$

Ostatni, najrzadziej występujący sposób rozwiązania pierwszego etapu, polegał na podniesieniu obu stron równania $a_1 + a_3 = 20$ do kwadratu. Pozwala to w konsekwencji szybko obliczyć drugi wyraz ciągu. Ilustrację tej metody przedstawia Przykład 46R.

Przykład 46R.

$$\begin{aligned}
 (a_1 + a_3)^2 &= 400 \\
 a_1^2 + 2a_1a_3 + a_3^2 &= 400 \\
 328 + 2a_1a_3 &= 400 \\
 2a_1a_3 &= 72 \\
 a_1a_3 &= 36 \\
 a_2^2 &= a_1 \cdot a_3 = 36 \\
 \text{I } a_2 &= 6 \quad \text{II } a_2 = -6 \\
 a_1 &= 20 - 18 = 2 \quad \vee \quad a_1 = 20 - 2 = 18 \\
 \text{Dla: } a_3 &= 2 \quad a_1 = 18 & \text{Dla: } a_3 = 18 \quad a_1 = 2 \\
 a_2 &= 6 \quad \vee \quad a_2 = -6 & a_2 = 6 \quad \vee \quad a_2 = -6 \\
 q = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} & \quad q = \frac{-6}{18} = -\frac{1}{3} & q = \frac{6}{2} = 3 \quad q = \frac{-6}{2} = -3 \\
 (18, 6, 2) & \quad (18, -6, 2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} a_1 = 20 - a_3 \\ a_1 = \frac{36}{a_3} \end{cases} \\
 \frac{36}{a_3} = 20 - a_3 \\
 36 = 20a_3 - a_3^2 \\
 0 = 20a_3 - a_3^2 - 36 \\
 \Delta = 1 - 4(-36/20) = 1 + 7.2 = 8.2 \\
 1 \pm \sqrt{8.2} = 1 \pm 2.864 \\
 a_3 = 20 - 2.864 = 17.136 \quad \text{or} \quad a_3 = 20 + 2.864 = 22.864 \\
 0 = -a_3^2 + 20a_3 - 36 \\
 \Delta = 400 - 4(36) = 400 - 144 = 256 \\
 \sqrt{256} = 16 \\
 a_3 = \frac{20 - 16}{-2} = 18 \\
 a_3 = \frac{20 + 16}{-2} = 2 \\
 a_3 = 18 \quad \vee \quad a_3 = 2
 \end{aligned}$$

Realizacja drugiego etapu rozwiązania to zastosowanie wzoru na sumę szeregu geometrycznego. Zdecydowana większość zdających, którzy poprawnie zrealizowali pierwszy etap rozwiązania, sumy te obliczyła poprawnie. Niektórzy jednak nie obliczali tych sum w ogóle, tak jak zdający z poprzedniego przykładu oraz z Przykładu 47R.

Przykład 47R.

$$\begin{aligned}
 (a, b, c) & \text{ c. geometryczny} & a_1 + a_3 &= 20 \\
 (a_1, a_2, a_3) & & a_1^2 + a_3^2 &= 328 \\
 (a_1, a_1q, a_1q^2) & & & \\
 1) \quad a_1 + a_3 &= 20 & a_1 + a_1q^2 &= 20 \Rightarrow a_1(1 + q^2) = 20 \Rightarrow a_1 = \frac{20}{1 + q^2} \\
 2) \quad a_1^2 + a_3^2 &= 328 & a_1^2 + (a_1q^2)^2 &= 328 \\
 a_1^2 + a_1^2q^4 &= 328 & &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \textcircled{1} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 = \frac{20}{1+q^2} \\ a_1^2 + a_1^2 q^4 = 328 \end{array} \right. \\
 & \textcircled{2} \quad \left(\frac{20}{1+q^2} \right)^2 + \left(\frac{20}{1+q^2} \right)^2 q^4 = 328 \\
 & \quad \frac{400}{1+2q^2+q^4} + \left(\frac{400}{1+2q^2+q^4} \right) q^4 = 328 \\
 & \quad \frac{400 + 400q^4}{(1+q^2)^2} = 328 \\
 & \quad 328(1+2q^2+q^4) = 400 + 400q^4 \\
 & \quad 328 + 656q^2 + 328q^4 - 400q^4 - 400 = 0 \\
 & \quad -72q^4 + 656q^2 - 72 = 0 \quad | :2 \\
 & \quad -36q^4 + 328q^2 - 36 = 0 \quad | :2 \\
 & \quad -18q^4 + 164q^2 - 18 = 0 \quad | :2 \\
 & \quad -9q^4 + 82q^2 - 9 = 0 \\
 & \quad W(3) = 0 \\
 & \quad -9q^3(q-3) - 27q^2(q-3) + 81q(q-3) + 3(q-3) = 0 \\
 & \quad (q-3)(-9q^3 - 27q^2 + 81q + 3) = 0 \\
 & \quad N(-3) = 0 \\
 & \quad -9q^2(q+3) + 1(81q+3) + 0(q+3) = 0 \\
 & \quad (q+3)(-9q^2+1) = 0 \\
 & \quad (q-3)(q+3)(1+3q)(1-3q) = 0 \\
 & \quad \begin{array}{l} q-3=0 \vee q+3=0 \vee 1+3q=0 \vee 1-3q=0 \\ \underline{q=3} \quad \underline{q=-3} \quad \underline{q=-\frac{1}{3}} \quad \underline{q=\frac{1}{3}} \end{array}
 \end{aligned}$$

Inni popełniali błędy merytoryczne wynikające z nieznajomości twierdzenia o sumie szeregu geometrycznego. Autor rozwiązania z Przykładu 48R założył błędnie, że szereg geometryczny jest zbieżny, gdy iloraz q jest dodatni, co zapisał w pierwszej linii rozwiązania, a dalszej części wziął pod uwagę tylko ilorazy dodatnie. Obliczone sumy S_I i S_{II} nie są sumami wszystkich wyrazów ciągów, tylko sumami dwóch pierwszych wyrazów tych ciągów.

Przykład 48R.

$$\begin{aligned}
 a_1 + a_3 &= 20 & a_3 &= 20 - a_1 & \text{Wzrosty } q=2 \\
 a_1 &= 20 - a_3 \\
 a_1^2 + a_3^2 &= 328 \\
 a_1^2 + (20 - a_1)^2 &= 328 \\
 a_1^2 + (20 - a_1)^2 &= 328 \\
 a_1^2 + 400 - 40a_1 + a_1^2 &= 328 \\
 2a_1^2 - 40a_1 + 400 &= 328 \\
 \Delta &= 1600 - 546 = 1054 & \sqrt{\Delta} &= 32 \\
 a_1 &= \frac{40 - 32}{2} = 4 & a_2 &= \frac{40 + 32}{2} = 18 \\
 \text{I} & \text{ gdy } a_1 = 4 \\
 a_1 + a_3 &= 20 & a_1 + a_1 q^2 &= 20 & q=2 \\
 4 + 16 &= 20 & q^2 &= 3 & (q_1 = 3, q_2 = -3) \\
 \text{II} & \text{ gdy } a_2 = 18 \\
 a_1 + a_3 &= 20 \\
 18 + 18q^2 &= 20 \\
 18q^2 &= 2 \\
 q^2 &= \frac{1}{9} & (q &= \frac{1}{3}, q = -\frac{1}{3}) \\
 S_I &= 4 \cdot \frac{1 - 3^2}{1 - 3} = 4 \cdot \frac{-8}{-2} = 16 \\
 S_{II} &= 18 \cdot \frac{1 - \frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{8}{\frac{2}{3}} = 12 & 18 &= \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot 18 = 36
 \end{aligned}$$

Wśród błędów, jakie występowały w rozwiązaniach tego zadania, szczególnie istotne są te, które uniemożliwiają maturzyście realizację strategii rozwiązania. Przyjrzyjmy się następującemu rozwiązaniu z Przykładu 49R, w którym zdający najpierw wykorzystał wzór na n -ty wyraz ciągu geometrycznego i zapisał układ równań z niewiadomymi a_1 i q , po czym zrezygnował tego pomysłu. Zapisał również warunek zbieżności szeregu geometrycznego oraz wyznaczył z równania $a_1 + a_3 = 20$ pierwszy wyraz, choć do drugiego równania podstawiał w miejsce a_3 liczbę $20 - a_1$. Otrzymał w ten sposób poprawne równanie kwadratowe z niewiadomą a_1 . Równanie to rozwiązał błędnie, otrzymując dwa ujemne rozwiązania. Konsekwentnie do obliczonych wartości a_1 próbował obliczyć iloraz ciągu. W obu przypadkach otrzymał równanie sprzeczne. Zdający niestety na tym poprzestał, zamiast krytycznie ocenić otrzymany rezultat. Umiejętność krytycznej oceny

rezultatów wykonywanych obliczeń nie jest niestety wystarczająco kształtowana w trakcie nauki matematyki. Błąd, jaki popełnił zdający można było łatwo wychwycić; wystarczyło zauważyć, że gdy $a_1 < 0$, to suma $a_1^2 - 20a_1 + 36$ jest dodatnia. Fakt, że jej składniki a_1^2 i 36 są dodatnie jest oczywisty, nieco trudniej zauważyć, że składnik $-20a_1$ też jest wtedy dodatni.

Przykład 49R.

$$\begin{aligned}
 a_1 + a_3 &= 20 \\
 a_1 + a_1 q^2 &= 20 \\
 a_1^2 + a_3^2 &= 328 & |q| < 1 \\
 a_1 &= 20 - a_3 \\
 a_1, a_1 q, a_1 q^2 & \\
 \begin{cases} a_1 + a_1 q^2 = 20 \\ a_1^2 + (a_1 q^2)^2 = 328 \end{cases} & \\
 a_1 q^2 &= 20 - a_1 \\
 a_1^2 + (20 - a_1)^2 &= 328 \\
 a_1^2 + 400 - 40a_1 + a_1^2 &= 328 \\
 2a_1^2 - 40a_1 + 42 &= 0 \quad |:2 \\
 a_1^2 - 20a_1 + 21 &= 0 \\
 \Delta &= 400 - 144 = 256 \\
 \sqrt{\Delta} &= 16 \\
 a_{1,1} &= \frac{-20-16}{2} = -18 \quad \vee \quad a_{1,2} = \frac{-20+16}{2} = -2 \\
 \text{Gdy } a_1 &= -18 & \text{Gdy } a_1 &= -2 \\
 -18 - 18q^2 &= 20 & -2 - 2q^2 &= 20 \\
 -18q^2 &= 38 \quad |:(-18) & -2q^2 &= 22 \\
 q^2 &= -\frac{38}{18} & q^2 &= -11 \\
 \text{nie ma sprzeczności} & & \text{sprzeczność} &
 \end{aligned}$$

WNIOSKI I REKOMENDACJE

POZIOM PODSTAWOWY

1. Analiza wyników egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym pozwala stwierdzić, że najłatwiejsze dla maturzystów były jednoetapowe zadania zamknięte lub zadania z luką, w rozwiązaniu których należało zastosować definicję, podstawową własność obiektu matematycznego lub znany algorytm (I i II obszar wymagań ogólnych).
2. Zadania otwarte, w których należy zbudować model matematyczny lub zaplanować kilkietapową strategię rozwiązania (III i IV obszar wymagań ogólnych) stanowią dla zdających – podobnie jak w latach poprzednich – trudne wyzwanie.
3. Największe trudności (poziom wykonania 30%) sprawiło zdającym otwarte zadanie tekstowe, wymagające interpretacji danych określonych w treści zadania, z uwzględnieniem zależności procentowych, oraz wykorzystania układu równań z dwiema niewiadomymi do obliczenia szukanej wartości.
4. Najczęstsze przyczyny niepowodzeń zdających na egzaminie maturalnym z matematyki to:
 - słaba sprawność rachunkowa
 - słaba znajomość praw oraz własności działań w zbiorze liczb rzeczywistych
 - nieuwaga skutkująca popełnianiem błędów w obliczeniach lub w przekształceniach algebraicznych
 - brak refleksji nad sensownością otrzymanego wyniku liczbowego
 - brak umiejętności czytania ze zrozumieniem nieskomplikowanego tekstu matematycznego i poprawnej interpretacji treści zadania
 - brak umiejętności planowania strategii rozwiązania, która łączy w logiczną i uporządkowaną całość kilka umiejętności.
5. Wskazane, by w procesie nauczania matematyki zwrócić uwagę na kształcenie następujących umiejętności:
 - starannego i sprawnego wykonywania przekształceń i obliczeń
 - czytania ze zrozumieniem, analizy i poprawnej interpretacji treści zadań
 - rozwiązywania zadań różnymi sposobami w celu pokazania możliwości stosowania różnych strategii rozwiązania danego problemu matematycznego oraz weryfikacji poprawności i realności otrzymanego wyniku.

POZIOM ROZSZERZONY

1. W tegorocznym egzaminie na poziomie rozszerzonym nie było zadań bardzo łatwych. Jedno z zadań okazało się łatwe, natomiast trzy zadania okazały się bardzo trudne.
2. Najlepiej maturzyści poradzili sobie z zadaniem sprawdzającym umiejętność zastosowania funkcji wykładniczej w zagadnieniu o kontekście praktycznym.
3. Zadania, z którymi maturzyści poradzili sobie stosunkowo łatwo, to zadania, których rozwiązanie sprowadzało się do zrealizowania znanej strategii, czy też zastosowania rutynowego algorytmu.

4. Najtrudniejszym zadaniem okazało się zadanie badające umiejętność obliczenia prawdopodobieństwa warunkowego w stosunkowo prostym doświadczeniu losowym.
5. Wyniki egzaminu jednoznacznie wskazują na słabe opanowanie umiejętności z zakresu geometrii. Dotyczy to w równym stopniu planimetrii, stereometrii, jak i geometrii analitycznej.
6. Na wynik egzaminu z matematyki na poziomie rozszerzonym znacząco wpływa **brak** szeroko rozumianej **sprawności rachunkowej** – problemy z poprawnym wykonywaniem obliczeń na liczbach (w tym na pierwiastkach) oraz na wyrażeniach algebraicznych, a także brak umiejętności krytycznej oceny otrzymywanych rezultatów tych obliczeń.
7. Podczas lekcji należy pokazywać różnorodne sposoby rozwiązywania tego samego zadania, zwracając uwagę na zalety i niedogodności każdego z nich. Należy też zwracać uwagę na poprawny zapis rozwiązań zadań, w tym na przejrzystość zapisu rozwiązania, poprawność stosowanej symboliki, zachowanie logicznego toku rozwiązania.
8. Niepokój budzi odsetek zdających, którzy nie uzyskali żadnego punktu z tego egzaminu. Może to świadczyć o nieprzemyślanym wyborze matematyki jako przedmiotu dodatkowego.