



<i>Rodzaj dokumentu:</i>	Osiągnięcia uczniów kończących VIII klasę szkoły podstawowej. Sprawozdanie za rok 2026
<i>Egzamin:</i>	Egzamin ósmoklasisty
<i>Przedmiot:</i>	Matematyka
<i>Termin egzaminu:</i>	12 maja 2026 r.
<i>Data publikacji dokumentu:</i>	25 września 2026 r.

Sprawozdanie zostało opracowane przez Centralną Komisję Egzaminacyjną we współpracy z okręgowymi komisjami egzaminacyjnymi.

Centralna Komisja Egzaminacyjna

ul. Józefa Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa

tel. 22 536 65 00

www.cke.gov.pl sekretariat@cke.gov.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Warszawie

ul. Józefa Bema 87, 01-233 Warszawa

tel. 22 457 03 35

www.oke.waw.pl info@oke.waw.pl

Serwis Komisji Egzaminacyjnych: egzaminy.gov.pl



**Serwis
Komisji
Egzaminacyjnych**



Spis treści

1. Opis arkusza standardowego	5
2. Dane dotyczące populacji uczniów	5
3. Przebieg egzaminu	7
4. Podstawowe dane statystyczne	8
5. Komentarz	18
6. Podstawowe informacje o arkuszach dostosowanych	75

1. Opis arkusza standardowego

W roku szkolnym 2025/2026 egzamin ósmoklasisty z matematyki został przeprowadzony na podstawie wymagań podstawy programowej określonych w Rozporządzeniu Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r.¹

Uczniowie bez dysfunkcji oraz uczniowie z dysleksją rozwojową rozwiązywali zadania zawarte w arkuszu OMAP-100-2605. Arkusz egzaminacyjny zawierał 20 zadań, w tym 14 zadań zamkniętych (zadania wyboru wielokrotnego, zadania prawda-fałsz, zadania na dobieranie) i 6 zadań otwartych. Za poprawne rozwiązanie wszystkich zadań można było uzyskać maksymalnie 30 punktów. Zadania w arkuszu egzaminacyjnym sprawdzały umiejętności z zakresu arytmetyki, algebry oraz geometrii płaskiej i przestrzennej. Wymagały od uczniów logicznego rozumowania, argumentowania, sprawnego posługiwania się narzędziami matematycznymi w kontekstach praktycznych oraz operowania obiektami matematycznymi. Ponadto w przypadku zadań otwartych – zapisania kolejnych etapów rozwiązania, podania wyniku lub sformułowania wniosku.

2. Dane dotyczące populacji uczniów

TABELA 1. UCZNIOWIE ROZWIĄZUJĄCY ZADANIA W ARKUSZU STANDARDOWYM

Liczba uczniów		53 338
Uczniowie	bez dysleksji rozwojowej	42 216
	z dysleksją rozwojową	11 122
	dziewczęta	26 556
	chłopcy	26 782
	ze szkół na wsi	17 258
	ze szkół w miastach do 20 tys. mieszkańców	7 646
	ze szkół w miastach od 20 tys. do 100 tys. mieszkańców	9 744
	ze szkół w miastach powyżej 100 tys. mieszkańców	18 690
	ze szkół publicznych	48 461
	ze szkół niepublicznych	4 877
	rozwiązujący zadania w języku polskim	53 338

Z egzaminu zwolniono 94 uczniów – laureatów i finalistów olimpiad przedmiotowych oraz laureatów konkursów przedmiotowych o zasięgu wojewódzkim lub ponadwojewódzkim.

¹ Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej, w tym dla uczniów z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu umiarkowanym lub znacznym, kształcenia ogólnego dla branżowej szkoły I stopnia, kształcenia ogólnego dla szkoły specjalnej przysposabiającej do pracy oraz kształcenia ogólnego dla szkoły policealnej (Dz.U. poz. 996).

TABELA 2. UCZNIOWIE ROZWIĄZUJĄCY ZADANIA W ARKUSZACH DOSTOSOWANYCH

Uczniowie	z autyzmem, w tym z zespołem Aspergera	2 492
	słabowidzący i niewidomi	96
	słabosłyszący i niesłyszący	157
	z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu lekkim	657
	z afazją	184
	z niepełnosprawnością ruchową spowodowaną mózgowym porażeniem dziecięcym	24
	z zaburzeniem widzenia barw	19
	z niepełnosprawnościami sprzężonymi	109
	o których mowa w art. 165 ust. 1 ustawy ² (cudzoziemcy)	3 770
	Ogółem	7 508

² Ustawa z dnia 14 grudnia 2016 r. *Prawo oświatowe* (Dz.U. z 2026 r. poz. 820).

3. Przebieg egzaminu

TABELA 3. INFORMACJE DOTYCZĄCE PRZEBIEGU EGZAMINU

Termin egzaminu			12 maja 2026 r.
Czas trwania egzaminu			125 minut dla uczniów rozwiązujących zadania w arkuszu standardowym lub czas przedłużony zgodnie z przyznanym dostosowaniem
Liczba szkół			1 743
Liczba zespołów egzaminatorów			22
Liczba egzaminatorów			425
Liczba egzaminatorów weryfikatorów			22
Liczba obserwatorów ³ (§ 7 ust. 1)			208
Liczba unieważnień ⁶	w przypadku:		
	art. 44zzv pkt 1	stwierdzenia niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez ucznia	0
	art. 44zzv pkt 2	wniesienia lub korzystania przez ucznia w sali egzaminacyjnej z urządzenia telekomunikacyjnego	0
	art. 44zzv pkt 3	zakłócania przez ucznia prawidłowego przebiegu egzaminu ósmoklasisty	0
	art. 44zzw ust. 1	stwierdzenia podczas sprawdzania pracy niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez ucznia	0
	art. 44zzy ust. 7	stwierdzenia naruszenia przepisów dotyczących przeprowadzania egzaminu ósmoklasisty	2
	art. 44zzy ust. 10	niemożności ustalenia wyniku (np. zaginięcia karty odpowiedzi)	0
	inne (np. złe samopoczucie ucznia)		0
Liczba wglądów ⁴ (art. 44zzz ust. 1)			2 247

³ Rozporządzenie Ministra Edukacji i Nauki z dnia 2 sierpnia 2022 r. w sprawie szczegółowych warunków i sposobu przeprowadzania egzaminu ósmoklasisty (Dz.U. poz. 1636, z późn. zm.).

⁴ Ustawa z dnia 7 września 1991 r. o systemie oświaty (Dz.U. z 2025 r. poz. 881, z późn. zm.).

4. Podstawowe dane statystyczne

Wyniki uczniów

WYKRES 1. ROZKŁAD WYNIKÓW UCZNIÓW

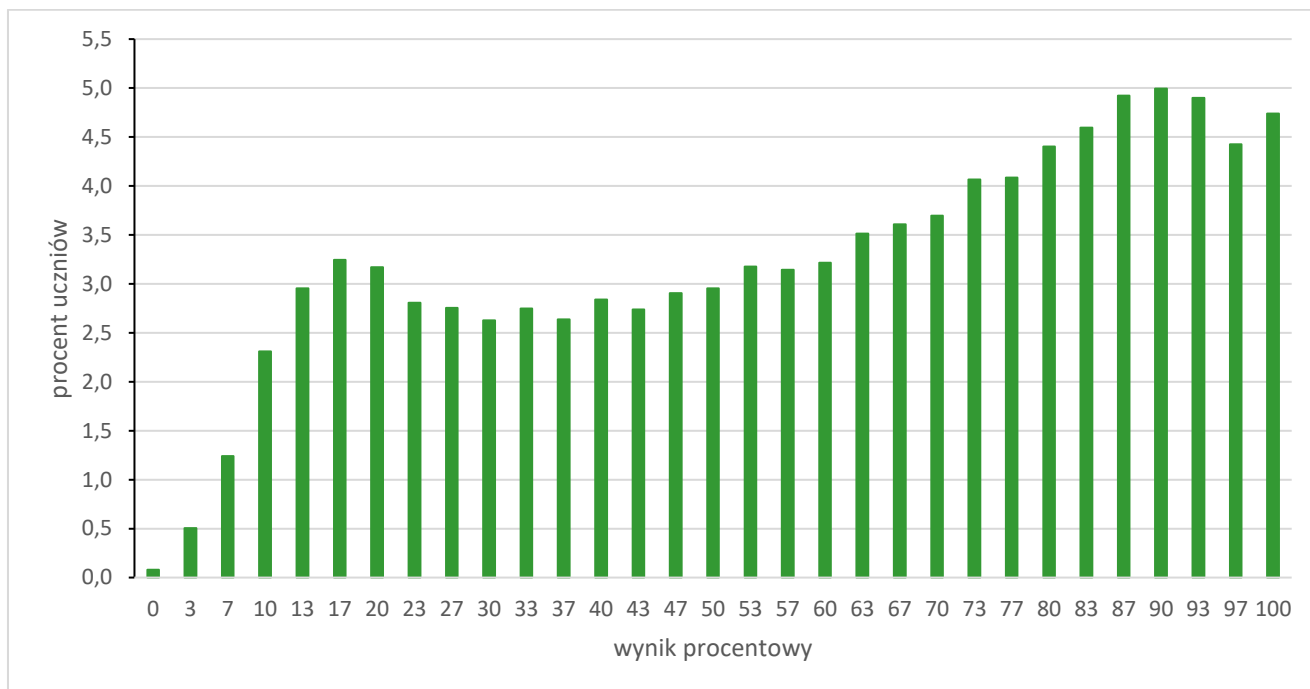


TABELA 4. WYNIKI UCZNIÓW – PARAMETRY STATYSTYCZNE

Liczba uczniów	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
53 338	0	100	63	90	60	28

TABELA 5. WYNIKI UCZNIÓW W PROCENTACH, ODPOWIEDAJĄCE IM WARTOŚCI CENTYLI I WYNIKI NA SKALI STANINOWEJ

Matematyka		
wynik procentowy	wartość centyla	stanin
0	1	1
3	1	
7	3	
10	6	
13	10	2
17	14	
20	18	3
23	22	
27	25	
30	28	4
33	32	
37	35	
40	38	
43	41	
47	44	5
50	48	
53	51	
57	54	
60	58	
63	61	
67	65	6
70	68	
73	72	
77	76	
80	80	7
83	84	
87	87	
90	91	8
93	95	
97	98	9
100	100	

W tabeli 5. przedstawiono wyniki procentowe uczniów, odniesiono je do wartości centyla i odpowiadającego im stanina. Wyniki w skali centylowej i staninowej umożliwiają porównanie wyniku ucznia z wynikami uczniów w całym kraju. Na przykład, jeśli uczeń z matematyki uzyskał 57% punktów możliwych do zdobycia (wynik procentowy), to oznacza, że jego wynik jest taki sam lub wyższy od wyniku 54% wszystkich zdających (wynik centylowy), a niższy od wyniku 46% zdających i znajduje się on w 5. staninie.

Średnie wyniki szkół⁵ na skali staninowej

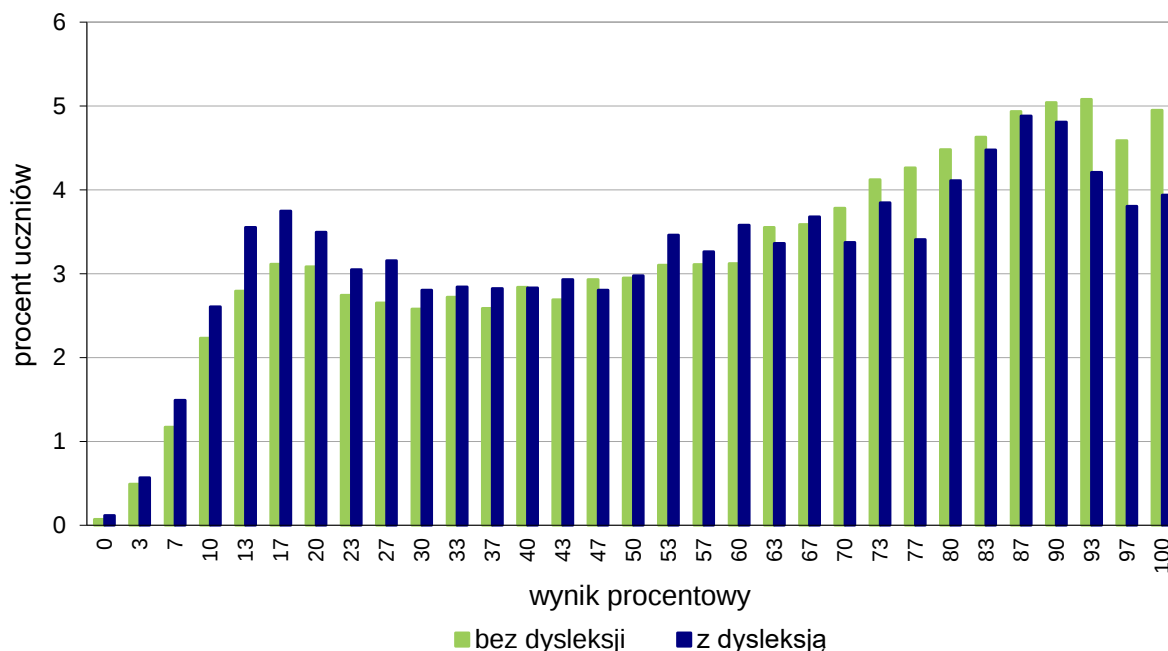
TABELA 6. WYNIKI SZKÓŁ NA SKALI STANINOWEJ

Stanin	Przedział wyników (w%)
1	7–29
2	30–37
3	38–43
4	44–49
5	50–55
6	56–61
7	62–68
8	69–76
9	77–97

Skala staninowa umożliwia porównywanie średnich wyników szkół w poszczególnych latach. Uzyskanie w kolejnych latach takiego samego średniego wyniku w procentach nie oznacza tego samego poziomu osiągnięć.

Wyniki uczniów bez dysleksji oraz uczniów z dysleksją rozwojową

WYKRES 2. ROZKŁADY WYNIKÓW UCZNIÓW BEZ DYSLEKSJI ORAZ UCZNIÓW Z DYSLEKSJĄ ROZWOJOWĄ



⁵ Ilekcioć w niniejszym sprawozdaniu jest mowa o wynikach szkół w 2026 roku, przez szkołę należy rozumieć każdą placówkę, w której liczba uczniów przystępujących do egzaminu była nie mniejsza niż 5. Wyniki szkół obliczono na podstawie wyników uczniów, którzy wykonywali zadania z arkusza OMAP-100-2605.

TABELA 7. WYNIKI UCZNIÓW BEZ DYSLEKSJI ORAZ UCZNIÓW Z DYSLEKSJĄ ROZWOJOWĄ – PARAMETRY STATYSTYCZNE

	Liczba uczniów	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
Uczniowie bez dysleksji	42 216	0	100	63	93	60	28
Uczniowie z dysleksją rozwojową	11 122	0	100	60	87	57	28

Wyniki dziewcząt i chłopców

WYKRES 3. ROZKŁADY WYNIKÓW DZIEWCZĄT I CHŁOPCÓW

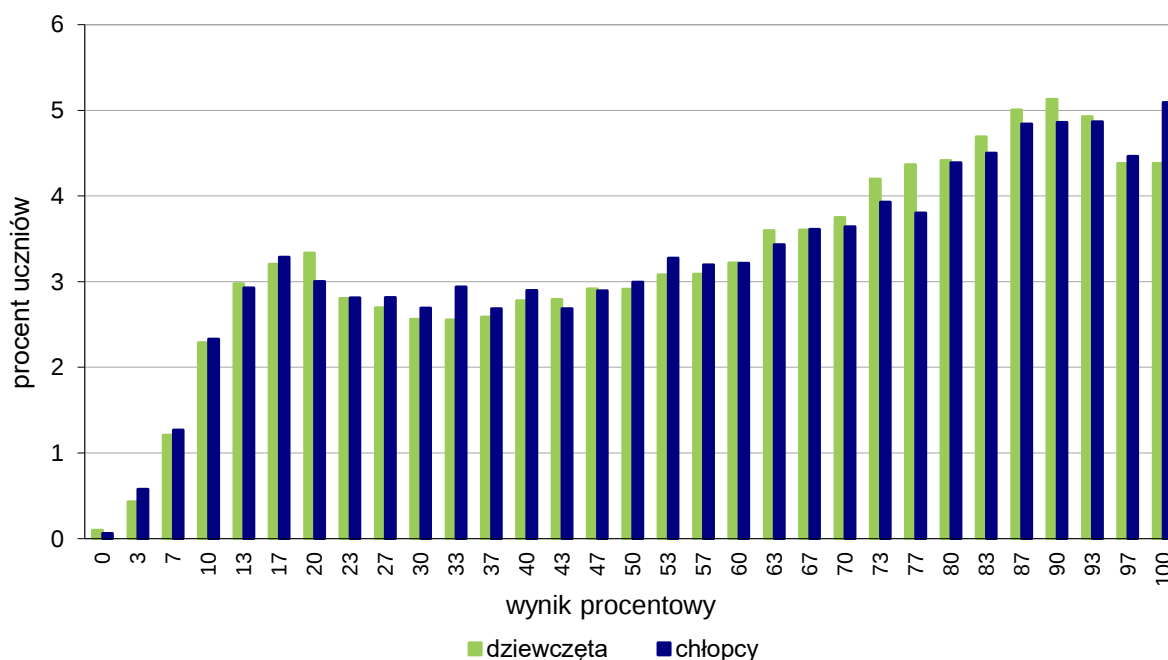


TABELA 8. WYNIKI DZIEWCZĄT I CHŁOPCÓW – PARAMETRY STATYSTYCZNE

Płeć	Liczba uczniów	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
Dziewczęta	26 556	0	100	63	90	60	28
Chłopcy	26 782	0	100	63	100	59	28

Wyniki uczniów a wielkość miejscowości**TABELA 9.** WYNIKI UCZNIÓW W ZALEŻNOŚCI OD LOKALIZACJI SZKOŁY – PARAMETRY STATYSTYCZNE

	Liczba uczniów	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
Wieś	17 258	0	100	57	80	55	27
Miasto do 20 tys. mieszkańców	7 646	0	100	57	17	54	28
Miasto od 20 tys. do 100 tys. mieszkańców	9 744	0	100	63	87	59	27
Miasto powyżej 100 tys. mieszkańców	18 690	0	100	73	100	67	27

Wyniki uczniów szkół publicznych i szkół niepublicznych**TABELA 10.** WYNIKI UCZNIÓW SZKÓŁ PUBLICZNYCH I SZKÓŁ NIEPUBLICZNYCH – PARAMETRY STATYSTYCZNE

	Liczba uczniów	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
Szkoła publiczna	48 461	0	100	63	87	59	28
Szkoła niepubliczna	4 877	0	100	77	100	66	30

Poziom wykonania zadań

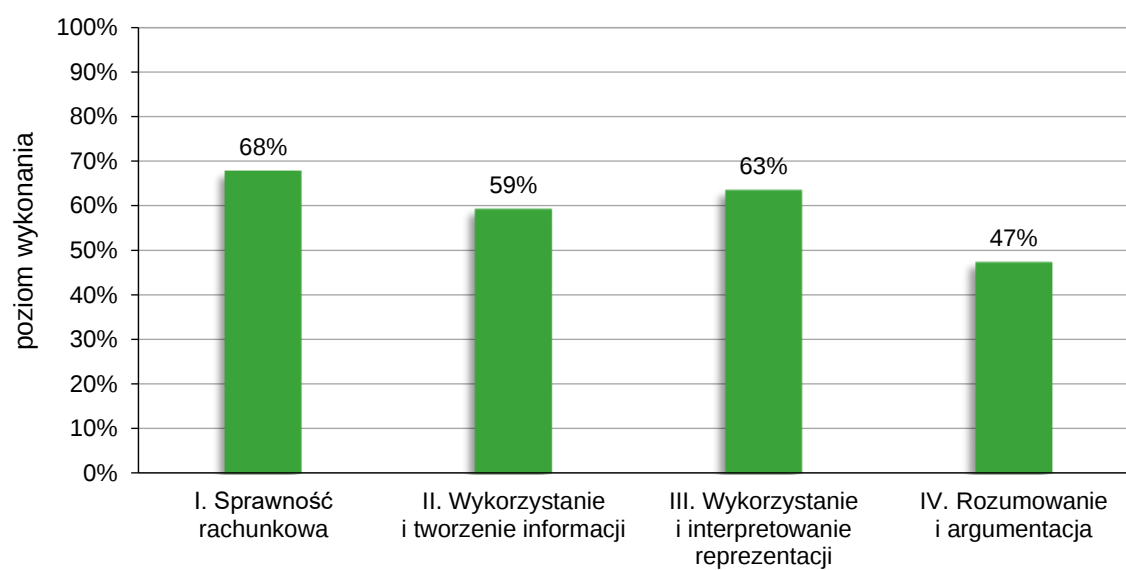
TABELA 11. POZIOM WYKONANIA ZADAŃ

Wymagania podstawy programowej			
Numer zadania	Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poziom wykonania zadania (%)
1.	II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Odczytywanie i interpretowanie danych przedstawionych w różnej formie oraz ich przetwarzanie.	KLASY VII i VIII V. Obliczenia procentowe. Uczeń: 5) stosuje obliczenia procentowe do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym [...]. XIII. Odczytywanie danych i elementy statystyki opisowej. Uczeń: 1) interpretuje dane przedstawione za pomocą [...] diagramów [...] kołowych [...].	77
2.	I. Sprawność rachunkowa. 1. Wykonywanie nieskomplikowanych obliczeń w pamięci lub pisemnie oraz wykorzystanie tych umiejętności w sytuacjach praktycznych.	KLASY IV–VI II. Działania na liczbach naturalnych. Uczeń: 11) znajduje największy wspólny dzielnik (NWD) [...] i najmniejszą wspólną wielokrotność (NWW) dwóch liczb naturalnych co najwyżej trzycyfrowych metodą rozkładu na czynniki.	63
3.	I. Sprawność rachunkowa. 1. Wykonywanie nieskomplikowanych obliczeń w pamięci lub pisemnie oraz wykorzystanie tych umiejętności w sytuacjach praktycznych.	KLASY VII i VIII II. Pierwiastki. Uczeń: 1) oblicza wartości pierwiastków kwadratowych i sześciennych z liczb, które są odpowiednio kwadratami lub sześciánami liczb wymiernych.	64
4.	I. Sprawność rachunkowa. 1. Wykonywanie nieskomplikowanych obliczeń w pamięci lub pisemnie oraz wykorzystanie tych umiejętności w sytuacjach praktycznych.	KLASY VII i VIII I. Potęgi o podstawach wymiernych. Uczeń: 2) mnoży [...] potęgi o wykładnikach całkowitych dodatnich.	83
5.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie modelu matematycznego do prostej sytuacji oraz budowanie go w różnych kontekstach, także w kontekście praktycznym.	KLASY IV–VI VI. Elementy algebry. Uczeń: 2) stosuje oznaczenia literowe nieznanymi wielkości liczbowych i zapisuje proste wyrażenia algebraiczne na podstawie informacji osadzonych w kontekście praktycznym [...]. KLASY VII i VIII V. Obliczenia procentowe. Uczeń: 5) stosuje obliczenia procentowe do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym [...].	74
6.	IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie prostego rozumowania, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, rozróżnianie dowodu od przykładu.	KLASY IV–VI II. Działania na liczbach naturalnych. Uczeń: 6) rozpoznaje liczby podzielne przez 2, 3, 4, 5, 9, 10, 100.	57

7.	I. Sprawność rachunkowa. 1. Wykonywanie nieskomplikowanych obliczeń w pamięci lub pisemnie oraz wykorzystanie tych umiejętności w sytuacjach praktycznych.	KLASY IV–VI XIV. Zadania tekstowe. Uczeń: 5) do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym stosuje poznaną wiedzę z zakresu arytmetyki [...] oraz nabyte umiejętności rachunkowe, a także własne poprawne metody.	59
8.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Używanie prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych, interpretowanie pojęć matematycznych i operowanie obiektami matematycznymi.	KLASY VII i VIII III. Tworzenie wyrażeń algebraicznych z jedną i wieloma zmiennymi. Uczeń: 2) oblicza wartości liczbowe wyrażeń algebraicznych. IV. Przekształcanie wyrażeń algebraicznych. Sumy algebraiczne i działania na nich. Uczeń: 3) mnoży sumy algebraiczne przez jednomiany i dodaje wyrażenia powstałe z mnożenia sum algebraicznych przez jednomiany.	49
9.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Używanie prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych, interpretowanie pojęć matematycznych i operowanie obiektami matematycznymi.	KLASY VII i VIII XIII. Odczytywanie danych i elementy statystyki opisowej. Uczeń: 3) oblicza średnią arytmetyczną kilku liczb.	75
10.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Używanie prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych, interpretowanie pojęć matematycznych i operowanie obiektami matematycznymi.	KLASY VII i VIII IX. Wielokąty. Uczeń: 2) stosuje wzory na pole trójkąta [...]. VIII. Własności figur geometrycznych na płaszczyźnie. Uczeń: 7) zna i stosuje w sytuacjach praktycznych twierdzenie Pitagorasa (bez twierdzenia odwrotnego).	61
11.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie modelu matematycznego do prostej sytuacji oraz budowanie go w różnych kontekstach, także w kontekście praktycznym.	KLASY IV–VI XI. Obliczenia w geometrii. Uczeń: 1) oblicza miary kątów, stosując przy tym poznane własności kątów i wielokątów. KLASY VII i VIII VI. Równania z jedną niewiadomą. Uczeń: 4) rozwiązuje zadania tekstowe za pomocą równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą [...].	79

12.	II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Odczytywanie i interpretowanie danych przedstawionych w różnej formie oraz ich przetwarzanie.	KLASY IV–VI XIV. Zadania tekstowe. Uczeń: 5) do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym stosuje poznaną wiedzę z zakresu arytmetyki i geometrii oraz nabyte umiejętności rachunkowe, a także własne poprawne metody. KLASY VII i VIII X. Oś liczbową. Układ współrzędnych na płaszczyźnie. Uczeń: 5) oblicza długość odcinka, którego końce są danymi punktami kratowymi w układzie współrzędnych.	49
13.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Używanie prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych, interpretowanie pojęć matematycznych i operowanie obiektami matematycznymi.	KLASY VII i VIII IX. Wielokąt. Uczeń: 2) stosuje wzory na pole trójkąta [...], kwadratu [...], a także do wyznaczania długości odcinków [...].	65
14.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie modelu matematycznego do prostej sytuacji oraz budowanie go w różnych kontekstach, także w kontekście praktycznym.	KLASY VII i VIII XI. Geometria przestrzenna. Uczeń: 2) oblicza [...] pola powierzchni graniastosłupów prostych, prawidłowych i takich, które nie są prawidłowe [...].	58
15.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie modelu matematycznego do prostej sytuacji oraz budowanie go w różnych kontekstach, także w kontekście praktycznym.	KLASY IV–VI XIV. Zadania tekstowe. Uczeń: 5) do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym stosuje poznaną wiedzę z zakresu arytmetyki [...] oraz nabyte umiejętności rachunkowe, a także własne poprawne metody. KLASY VII i VIII VI. Równania z jedną niewiadomą. Uczeń: 4) rozwiązuje zadania tekstowe za pomocą równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą [...].	56
16.	IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie prostego rozumowania, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, rozróżnianie dowodu od przykładu.	KLASY IV–VI XII. Obliczenia praktyczne. Uczeń: 9) w sytuacji praktycznej oblicza: [...] prędkość przy danej drodze i czasie, czas przy danej drodze i prędkości oraz stosuje jednostki prędkości km/h i m/s.	62
17.	II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Odczytywanie i interpretowanie danych przedstawionych w różnej formie oraz ich przetwarzanie.	KLASY VII i VIII XIII. Odczytywanie danych i elementy statystyki opisowej. Uczeń: 1) interpretuje dane przedstawione za pomocą tabel [...]. V. Obliczenia procentowe. Uczeń: 3) oblicza, jaki procent danej liczby b stanowi liczba a .	69

18.	IV. Rozumowanie i argumentacja. 3. Stosowanie strategii wynikającej z treści zadania, tworzenie strategii rozwiązania problemu, również w rozwiązaniach wieloetapowych oraz w takich, które wymagają umiejętności łączenia wiedzy z różnych działów matematyki.	KLASY VII i VIII XI. Geometria przestrzenna. Uczeń: 2) oblicza objętości [...] graniastosłupów prostych, prawidłowych i takich, które nie są prawidłowe [...]; 3) oblicza objętości ostrosłupów [...] prawidłowych, i takich, które nie są prawidłowe [...]. III. Tworzenie wyrażeń algebraicznych z jedną i wieloma zmiennymi. Uczeń: 3) zapisuje zależności przedstawione w zadaniach w postaci wyrażeń algebraicznych jednej lub kilku zmiennych.	21
19.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie modelu matematycznego do prostej sytuacji oraz budowanie go w różnych kontekstach, także w kontekście praktycznym.	KLASY IV–VI XI. Obliczenia w geometrii. Uczeń: 3) oblicza pola: [...] trapezu [...] w sytuacjach praktycznych [...]. XIV. Zadania tekstowe. Uczeń: 5) do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym stosuje poznaną wiedzę z zakresu arytmetyki i geometrii oraz nabyte umiejętności rachunkowe, a także własne poprawne metody.	62
20.	II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 3. Używanie języka matematycznego do opisu rozumowania i uzyskanych wyników.	KLASY IV–VI XI. Obliczenia w geometrii. Uczeń: 2) oblicza obwód wielokąta o danych długościach boków. KLASY VII i VIII II. Pierwiastki. Uczeń: 4) oblicza pierwiastek z iloczynu i ilorazu dwóch liczb, wyłącza liczbę przed znak pierwiastka [...]. VIII. Własności figur geometrycznych na płaszczyźnie. Uczeń: 7) zna i stosuje w sytuacjach praktycznych twierdzenie Pitagorasa (bez twierdzenia odwrotnego).	47

Poziom wykonania zadań w zakresie poszczególnych obszarów umiejętności**WYKRES 4.** POZIOM WYKONANIA ZADAŃ W ZAKRESIE POSZCZEGÓLNYCH OBSZARÓW UMIEJĘTNOŚCI

Komentarz

Arkusz egzaminacyjny składał się z 20 zadań, w tym z 14 zadań zamkniętych i z 6 zadań otwartych. W zestawie nie było zadań bardzo łatwych i bardzo trudnych. Cztery zadania były trudne (poziom wykonania od 21% do 49%). Najliczniejszą grupę, jednaście zadań, stanowiły zadania umiarkowanie trudne (poziom wykonania od 56% do 69%). Pięć zadań okazało się łatwych (poziom wykonania od 74% do 83%). Za rozwiązanie zadań zamkniętych uczniowie uzyskali średnio 65% punktów możliwych do zdobycia, a za rozwiązanie zadań otwartych 54% punktów.

Umiejętności opisane w pierwszym wymaganiu ogólnym – **sprawność rachunkowa** – były sprawdzane za pomocą czterech zadań zamkniętych wielokrotnego wyboru (zadania 2., 3., 4. i 7.). Za ich rozwiązanie zdający uzyskali średnio 68% punktów możliwych do zdobycia.

Najłatwiejszym zadaniem zarówno w obszarze sprawności rachunkowej, jak i w całym arkuszu egzaminacyjnym było **zadanie 4.**, które sprawdzało umiejętność mnożenia potęg o jednakowych podstawach i wykładnikach całkowitych dodatnich. Poprawną odpowiedź wskazało 83% uczniów.

Przykłady 1. i 2. przedstawiają poprawne sposoby rozwiązania zadania zapisane w brudnopisie. W obu przypadkach uczniowie pomocniczo zapisali liczbę 3 w postaci 3^1 . W przykładzie 1. zdający dodatkowo odwołał się do reguły mnożenia potęg o jednakowych podstawach, zapisując dodawanie wykładników.

Przykład 1.

$$2^5 \cdot 2^3 \cdot 3^1 \cdot 3^4$$

$$2^8 \cdot 3^5$$

Przykład 2.

$$2^5 \cdot 3^1 \cdot 3^4 \cdot 2^3 = 2^8 \cdot 3^5$$

Zadanie 2. poprawnie rozwiązało 63% zdających. Sprawdzało ono umiejętność wyznaczania największego wspólnego dzielnika oraz najmniejszej wspólnej wielokrotności liczb naturalnych. Zadaniem uczniów było ustalenie czterocyfrowego kodu utworzonego z największego wspólnego dzielnika liczb 18 i 27 oraz najmniejszej wspólnej wielokrotności liczb 2 i 4. Do poprawnego rozwiązania konieczne było prawidłowe wyznaczenie obu wartości oraz wskazanie poprawnej odpowiedzi. Przykład 3. przedstawia poprawny tok rozumowania prowadzący do wyznaczenia prawidłowej odpowiedzi.

Przykład 3.

$$NWD = x \rightarrow 3 \cdot 3 = 9 \quad NWW = y \rightarrow 2 \cdot 2 = 4$$

18	2
9	3
3	3
1	

27	3
9	3
3	3
1	

2	2
1	

4	2
2	2
1	

4984

Analiza zapisów w brudnopisie wskazuje, że część zdających miała trudności zarówno z wyznaczeniem największego wspólnego dzielnika liczb 18 i 27, jak i najmniejszej wspólnej wielokrotności liczb 2 i 4. Przykłady 4. i 5. ilustrują najczęściej popełniane błędy.

Przykład 4.

X – najmniejszy wspólny dzielnik 18 i 27 $X = 3$

18	2
9	3
3	1

27	3
9	3
3	1

Y – najmniejsza wspólna wielokrotność

2	2	4	16	32
4	4	8	16	

Przykład 5.

18	2
9	3
3	3
1	

27	9
3	3
1	

$2 \times 2 \times 2 = 8$ $2 \times 3 \times 9$

Kluczem do wskazania poprawnej odpowiedzi w **zadaniu 3.** były przede wszystkim: umiejętność wykonywania działań na liczbach naturalnych, znajomość kolejności wykonywania działań oraz umiejętność obliczania wartości pierwiastków kwadratowych z liczb naturalnych. Zadanie poprawnie rozwiązało 64% zdających. Przykład 6. przedstawia poprawne obliczenie wszystkich wyrażeń arytmetycznych.

Przykład 6.

$$\begin{aligned}
 w &= \sqrt{100 - 64} - 2 = \sqrt{36} - 2 = 6 - 2 = \underline{\underline{4}} \\
 x &= 12 - \sqrt{64 + 36} = 12 - \sqrt{100} = 12 - 10 = \underline{\underline{2}} \\
 y &= \sqrt{25 - 16} - 3 = \sqrt{9} - 3 = 3 - 3 = \underline{\underline{0}} \\
 z &= 7 - \sqrt{9 + 16} = 7 - \sqrt{25} = 7 - 5 = \underline{\underline{2}}
 \end{aligned}$$

Na podstawie analizy wyników oraz rozwiązań uczniowskich zapisanych w brudnopisie można zauważyć, że trudność sprawiło uczniom poprawne obliczenie pierwiastka z sumy lub różnicy liczb. Te błędy świadczą o braku umiejętności wykonywania działań na pierwiastkach. Przykłady 7. i 8. są reprezentatywne dla tego rodzaju niepoprawnych rozwiązań. W przykładzie 7. dodatkowo występuje błąd rachunkowy.

Przykład 7.

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{100 - 64} - 2 = 10 - 8 - 2 = 0 \\ x &= 12 - \sqrt{64 + 36} = 12 - 8 + 6 = 2 \\ y &= \sqrt{25 - 16} - 3 = 5 - 4 - 3 = -2 \\ z &= 7 - \sqrt{9 + 16} = 7 - 3 + 4 = 8 \end{aligned}$$

Przykład 8.

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{100 - 64} - 2 = 10 - 8 - 2 = 0 \\ x &= 12 - \sqrt{64 + 36} = 12 - 8 + 6 = 10 \\ y &= \sqrt{25 - 16} - 3 = 5 - 4 - 3 = -2 \\ z &= 7 - \sqrt{9 + 16} = 7 - 3 + 4 = 8 \end{aligned}$$

Największą trudność spośród zadań sprawdzających to wymaganie sprawiło uczniom **zadanie 7.**, osadzone w kontekście praktycznym. W zadaniu należało obliczyć łączną liczbę jabłek znajdujących się w 10 koszach, wykorzystując informacje o łącznej liczbie owoców oraz zależności między liczbą jabłek i pomarańczy. Poprawne rozwiązanie wskazało 59% uczniów, co oznacza, że dla dużej części zdających zastosowanie zależności matematycznych w sytuacji praktycznej stanowiło istotną trudność. Prawidłowe rozwiązanie zadania zapisane w brudnopisie przedstawia przykład 9.

Przykład 9.

10 koszy	400 szt j. i p.	jabłka $x + 6 = 17 + 6 = 23$	} 40 szt w 1 koszu
		pomarańcze $x = 17$	

$$10(x + (x + 6)) = 400$$

$$10x + 10x + 60 = 400$$

$$20x + 60 = 400 / -60$$

$$20x = 340 / :20$$

$$x = 17$$

$$23 \cdot 10 = 230$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ 340 : 20 \\ -20 \\ \hline 140 \\ -140 \\ \hline 0 \end{array}$$

Przykłady 10. i 11. ilustrują błędne strategie rozwiązania zadania. Rozwiązanie zaprezentowane w przykładzie 10. świadczy o trudnościach w interpretacji zależności między danymi. Natomiast przykład 11. przedstawia rozwiązanie, w którym zdający zapisał błędne równanie z jedną niewiadomą, oznaczającą liczbę pomarańczy, co uniemożliwiło uzyskanie prawidłowego wyniku.

Przykład 10.

$j + p = 400 \text{ szt.}$

$400 : 2 = 200$

$200 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6$

$12 \quad 12 \quad 12 \quad 12 \quad 12$

$24 \quad 24$

$48 + 12 = 60$

$400 - 260 = 140$ tyle jest pomarańczy

błędne obliczenie liczby jabłek

Przykład 11.

11

$40x + 60 = 400$

$40x = 340 : 40$

$x = 39 \cdot 100 : 40$

$x = 40$

$x + 6$

400 sztuk $\rightarrow$ jabłka, pomarańcze

$10x + 60 = 400$

$x + x + 6 = 400$

$2x + 6 = 400 : -6$

$2x = 394 : 2$

$x =$

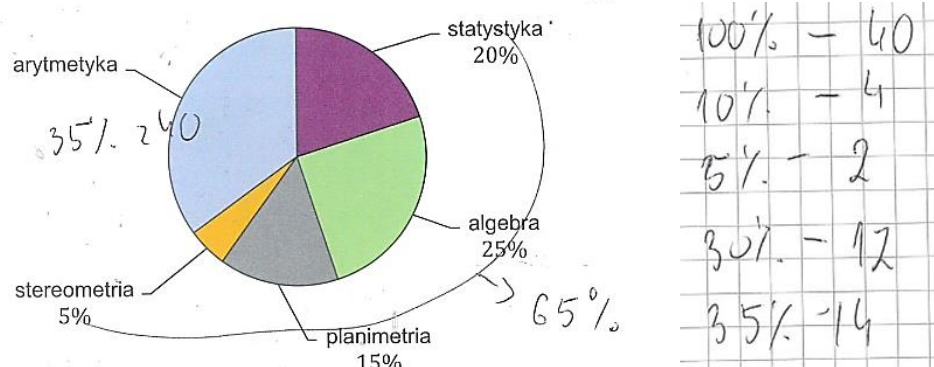
187
394 : 2
- 2
187
- 187
14

Umiejętności objęte drugim wymaganiem ogólnym, tj. **wykorzystanie i tworzenie informacji**, były sprawdzane za pomocą czterech zadań, w tym dwóch zadań zamkniętych (zadania 1. i 12.) oraz dwóch zadań otwartych (zadania 17. i 20.). Za rozwiązanie zadań zamkniętych zdający uzyskali odpowiednio 77% i 49% punktów możliwych do zdobycia, natomiast poziom wykonania zadań otwartych wyniósł odpowiednio 69% i 47%. Łącznie za rozwiązanie zadań sprawdzających to wymaganie uczniowie uzyskali średnio 59% punktów możliwych do zdobycia.

Najłatwiejszym zadaniem w tym obszarze było **zadanie 1.**, sprawdzające umiejętność wykorzystywania obliczeń procentowych do rozwiązywania problemów osadzonych w kontekście praktycznym. Rozwiązanie zadania wymagało odczytania informacji przedstawionych na diagramie, ich właściwej interpretacji oraz wykonania odpowiednich obliczeń. Zadanie poprawnie rozwiązało 77% zdających.

Przykłady 12. i 13. przedstawiają poprawne strategie rozwiązania zaprezentowane przez uczniów w brudnopisie. W przykładzie 12. zdający najpierw wyznaczył na diagramie, jaki procent wszystkich zadań stanowią zadania z arytmetyki, a następnie wykorzystał otrzymany wynik do obliczenia liczby zadań z tego działu.

Przykład 12.



Przykład 13. przedstawia rozwiązanie, w którym uczeń wyznaczył liczbę zadań z wykorzystaniem proporcji.

Przykład 13.

$$5\% + 15\% + 25\% + 20\% = 65\%$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ - 65 \\ \hline 35 \end{array}$$

$$100\% \rightarrow 40$$

$$35\% \rightarrow x \quad x = \frac{40 \cdot 35}{100} = \frac{140}{10} = 14$$

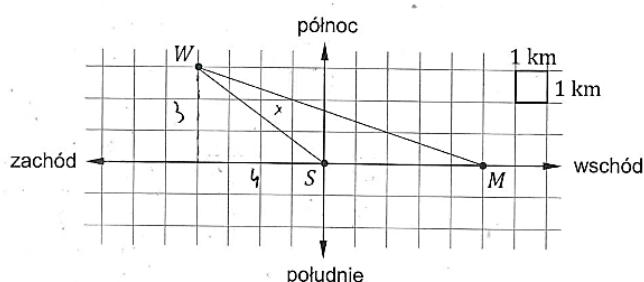
Drugie zadanie zamknięte sprawdzające to wymaganie – **zadanie 12.** typu prawda-falsz, okazało się zdecydowanie trudniejsze. Jego rozwiązanie wymagało wykorzystania wiedzy dotyczącej obliczania długości odcinka, którego końce są danymi punktami kratowymi w układzie współrzędnych, a także zastosowania twierdzenia Pitagorasa.

Zadanie zostało poprawnie rozwiązane przez 49% zdających. Prawdziwość pierwszego zdania poprawnie oceniło 67% ósmoklasistów. W tym celu należało wyznaczyć długość

odcinka SM , równą 5 km, a następnie – wykorzystując twierdzenie Pitagorasa lub znajomość własności trójkątów pitagorejskich – ustalić, że długość odcinka SW także jest równa 5 km. Ocena prawdziwości drugiego zdania wymagała obliczenia długości odcinka MW , równej $\sqrt{90}$ km, oraz porównania otrzymanego wyniku z odległością 10 km. Tę część zadania poprawnie wykonało 76% ósmoklasistów.

Analiza rozwiązań uczniowskich wskazuje, że wielu zdających wspomagało się rysunkiem zamieszczonym w arkuszu egzaminacyjnym lub wykonywało w brudnopisie własny szkic sytuacji opisanej w zadaniu. Ta strategia ułatwiała interpretację zależności geometrycznych oraz planowanie kolejnych etapów rozwiązania. Przykład 14. przedstawia poprawne rozwiązanie uczniowskie.

Przykład 14.



$M = \text{Muzeum}$
 $W = \text{Wieża}$
 $S = \text{Schronisko}$

$$3^2 + 9^2 = x^2$$

$$9 + 81 = x^2$$

$$90 = x^2$$

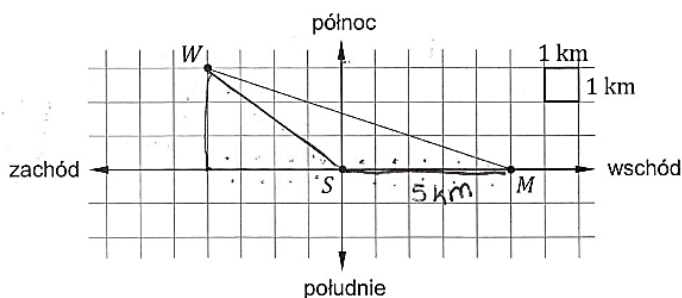
$$x = \sqrt{90} < 10$$

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Odległość w linii prostej schroniska od muzeum jest równa odległości w linii prostej schroniska od wieży widokowej.	☒ P	F
Odległość w linii prostej muzeum od wieży widokowej jest mniejsza niż 10 km.	☒ P	F

Przykład 15. ilustruje rozwiązanie ucznia, który miał trudność z wyznaczeniem długości odcinka SW .

Przykład 15.

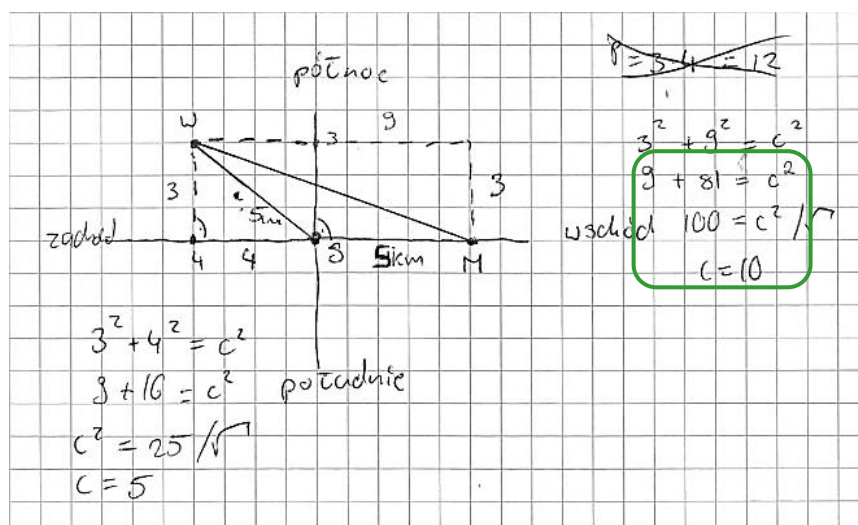


Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Odległość w linii prostej schroniska od muzeum jest równa odległości w linii prostej schroniska od wieży widokowej.	P	☒ F
Odległość w linii prostej muzeum od wieży widokowej jest mniejsza niż 10 km.	☒ P	F

Przykład 16. przedstawia takie rozwiązanie, w którym zdający popełnił błąd rachunkowy i – w konsekwencji – nieprawidłowo ocenił prawdziwość drugiego zdania.

Przykład 16.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Odległość w linii prostej schroniska od muzeum jest równa odległości w linii prostej schroniska od wieży widokowej.	☒ P	☐ F
Odległość w linii prostej muzeum od wieży widokowej jest mniejsza niż 10 km.	☐ P	☒ F

Umiejętności z drugiego wymagania ogólnego były sprawdzane również za pomocą dwóch zadań otwartych. Łatwiejszym z nich okazało się **zadanie 17.**, którego poziom wykonania wyniósł 69%. Zadanie sprawdzało umiejętność odczytywania i przetwarzania danych przedstawionych w tabeli oraz obliczania, jaki procent jednej liczby stanowi druga liczba. Rozwiązanie wymagało od zdających połączenia informacji dotyczących liczby dziewcząt i chłopców uczestniczących w Dniu Sportu, wyznaczenia liczby uczestników turnieju tenisa stołowego, a następnie określenia, jaki odsetek wszystkich uczestników Dnia Sportu stanowili uczestnicy tego turnieju.

Maksymalną liczbę 3 punktów za to zadanie uzyskało blisko 57% zdających.

Poprawne rozwiązania ocenione na 3 punkty przedstawiono w przykładach 17.–21. Ilustrują one różne strategie wykonania zadania, m.in. zastosowanie proporcji, wykorzystanie wzoru do obliczenia, jaki procent jednej liczby stanowi druga liczba, a także rozwiązanie graficzne.

Przykład 17.

$$\begin{aligned}
 16 + 46 + 34 &= 96 \quad 3 \text{ l. chłopców} \\
 15 + 16 + 96 + 8 &= 104 \quad 3 \text{ l. dziewczyny} \\
 15 + 65 &= 80 \\
 104 - 80 &= 24 \quad 3 \text{ l. dziewczynom biorącym udział w turnieju tenisa stołowego} \\
 96 + 104 &= 200 \quad ? \quad 200 - 100\% \\
 24 + 36 &= 58 \quad 58 - x \\
 x &= \frac{58}{200} \cdot 100\% = \frac{58}{2} = 29\%
 \end{aligned}$$

Odp.: W dniu Sportu 29% dzieci brało udział w turnieju tenisa stołowego.

Przykład 18.

$$\begin{aligned}
 \text{chłopcy } x \quad (96) \\
 \text{dziewczyna } x + 8 \quad (96 + 8 = 104) \\
 \text{wszyscy } 200 \quad (100\%)
 \end{aligned}$$

16	1
46	16
34	17
96	

$$\begin{aligned}
 200 &\text{ to } 100\% \\
 20 &\text{ to } 10\% \\
 2 &\text{ to } 1\% \\
 24 &\text{ to } 12\% \quad (\text{dziewczyny}) \\
 34 &\text{ to } 17\% \quad (\text{chłopcy})
 \end{aligned}$$

$$12\% + 17\% = 29\%$$

Odp. W turnieju tenisa stołowego brało udział 29% wszystkich uczestników.

Przykład 19.

$$\begin{aligned}
 D &= 15 + 65 = 80 & 36 + 8 &= 104 \\
 Ch &= 46 + 16 + 34 = 96 & 104 - 80 &= 24 \\
 \text{Tenis stołowy dziewczyny} &= 24 \\
 24 + 34 &= 58 & 200 &- 100\% \\
 104 + 96 &= 200 & 2 &- 1\% \\
 & & 10 &- 5\% \\
 & & 20 &- 10\% \\
 & & 50 &- 25\% \\
 & & 8 &- 4\% \\
 & & 58 &- 29\%
 \end{aligned}$$

Zatem liczba dzieci, które brały udział w turnieju tenisa stołowego jest 29%

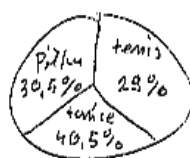
Przykład 20. ilustruje minimalistyczne rozwiązanie graficzne. Uczeń poprawnie obliczył liczbę chłopców i dziewcząt biorących udział w Dniu Sportu, liczbę wszystkich uczestników Dnia Sportu oraz liczbę uczestników w każdym z trzech turniejów sportowych. Następnie obliczył, jaki procent liczby wszystkich uczestników stanowią dzieci, które brały udział w turnieju piłki nożnej oraz turnieju tańca. W kolejnym etapie rozwiązania uzupełnił do 100%, procent liczby uczestników turnieju tenisa stołowego.

Przykład 20.

$$D = 80 + 16 + 8 = 104$$

$$Ch = 96$$

$$100\% = 200$$



piłka	taniec	tenis
61	81	58
30,5	40,5	29

Przykład 21. prezentuje rozwiązanie, w którym zdający do obliczenia liczby dziewcząt biorących udział w turnieju tenisa stołowego zastosował równanie.

Przykład 21.

liczba dziewcząt w t.s. - x

liczba wszystkich dziewcząt - $15 + 65 + x = 80 + x$

liczba chłopców - $46 + 16 + 34 = 96$

dziewczęta było o 8 mniej niż chłopcy - $96 + 8$

$$80 + x = 96 + 8$$

$$x = 16 + 8$$

$$x = 24$$

poprawne równanie z jedną niewiadomą prowadzące do obliczenia liczby dziewcząt, które brały udział w turnieju tenisa stołowego

liczba uczestników t.s. - $24 + 34 = 58$

liczba wszystkich uczestników - $96 + 96 + 8 = 200$

$$\frac{58}{200} \cdot 100\% = 29\%$$

W przykładach 22. i 23. przedstawiono rozwiązania ocenione na 2 punkty. Taki wynik uzyskało około 14% zdających. Najczęściej przeszkodą w uzyskaniu maksymalnej liczby punktów były błędy rachunkowe.

Przykład 22.

? = X

	liczba chłopców	liczba dziewcząt
I s	$46 + 16 + 34 = 86$	$15 + 65 + X = 80 + X$
II s	86	$86 + 8$

błąd rachunkowy

$$86 + 80 + X = 86 + 86 + 8$$

$$166 + X = 180 \quad | -166$$

$$X = 14$$

liczba wszystkich dzieci $= 86 + 80 + 14 = 180$

liczba dzieci, które wzięły udział w turnieju tenisa stołowego $= X + 34 = 14 + 34 = 48$

$$\frac{48}{180} \cdot 100\% = 26,6\% \approx 27\%$$

Odp.: Dzieci, które wzięły udział w turnieju tenisa stołowego, około 27% (dokładnie 26,6%)

Przykład 23.

liczba chłopców = 96

liczba dziewczyn = $96 + 8 = 104$

liczba dziewczyn w turnieju tenisowym =

$$104 - 80 = 24$$

liczba chłopców w tenisie = 34

razem = 58

$$\frac{58}{200} = \frac{29}{100} = 29\%$$

błąd rachunkowy

Przykład 24. jest ilustracją rozwiązania niepełnego – zdający popełnił błąd rachunkowy i nie wykonał ostatniego etapu prowadzącego do uzyskania odpowiedzi.

Przykład 24.

l. dziewczyn = $(46 + 16 + 34) - 8 = 96 + 8 = 104$
 l. chłopców = 96
 l. dziewczyn grających w turnieju tenisa stołowego
 $88 - (15 + 15) = 88 - 30 = 58$
 $34 + 24 = 58 \Rightarrow$ l. dziewczyn grających w tenisa stołowego
 l. chłopców = 34
 l. Wszystkich dzieci: $104 + 96 = 200$
 $200 - 100\%$
 $58 - x\%$
 $200x = 580 \quad 200$
 $x =$

Zapisy na marginesie poza ramką nie będą oceniane.

20
 $\frac{580}{20} = 29$
 $\frac{29}{20} = 1.45$
 $\frac{1.45}{100} = 0.0145$
 $0.0145 \cdot 200 = 2.9$
 $2.9 \cdot 100 = 290$
 $290 - 100 = 190$
 $190 + 58 = 248$
 $248 - 104 = 144$
 $144 - 96 = 48$
 $48 - 34 = 14$
 $14 \cdot 100 = 1400$
 $1400 - 1000 = 400$
 $400 - 100 = 300$
 $300 - 100 = 200$
 $200 - 100 = 100$
 $100 - 100 = 0$

błąd rachunkowy

W przykładach 25. i 26. przedstawiono rozwiązania ocenione na 1 punkt. Taki wynik uzyskało prawie 9% uczniów. Zdający poprawnie wykonali wybrane etapy rozwiązania, jednak nieprawidłowo zestawili liczbę uczestników turnieju tenisa stołowego z liczbą wszystkich uczestników Dnia Sportu. Przyczyną utraty punktów było m. in. przyjęcie niepoprawnej podstawy obliczenia procentu lub pominięcie jednej z grup uczestników. W przykładzie 25. zdający przyjął wartość 138 jako liczbę uczestników turnieju tenisa stołowego. Taki wynik prawdopodobnie uzyskał dodając liczbę wszystkich dziewcząt uczestniczących w Dniu Sportu (104) do liczby chłopców grających w tenisa (34).

Przykład 25.

Liczba chłopców = $46 + 16 + 34 = 96$
 Liczba dziewcząt = $96 + 8 = 104$
 $100\% = 104 + 96$
 $100\% = 200$ uczniów
 $x\% = 138$
 $200x = 13800 \quad | :200$
 $x = 69$
 odp. Liczba dzieci biorących udział w turnieju tenisa wynosi 69% wszystkich dzieci.

069
 $\frac{138}{2} = 69$
 $\frac{69}{100} = 0.69$
 $0.69 \cdot 200 = 138$
 $138 - 104 = 34$
 $34 - 34 = 0$

Przykład 26.

$\text{liczba chłopców} = 46 + 16 + 34 = 96$
 $\text{liczba dziewcząt} = 15 + 65 + x = 96 + 8 = 104$
 $15 + 65 + x = 104$
 $80 + x = 104$
 $x = 104 - 80$
 $x = 24$

$104 + 96 = 200$
 $200 - 100\%$
 $24 = x$

~~2004~~ ~~tenis stołowy~~ ~~tenis stołowy~~ = 24
 2400% : 200x = 12%
 odp.: 12% dzieci brało udział w turnieju tenisa stołowego.

pominięcie liczby chłopców grających w tenisa stołowego

Około 21% zdających nie rozwiązało poprawnie tego zadania i otrzymało 0 punktów.

Przykład 27. jest reprezentatywny dla takiego rozwiązania. Zdający niepoprawnie zinterpretował informację dotyczącą liczby dziewcząt, co skutkowało błędnym wyznaczeniem liczby wszystkich uczestników Dnia Sportu oraz liczby uczestników turnieju tenisa stołowego. W konsekwencji dalsze obliczenia nie mogły prowadzić do uzyskania prawidłowego wyniku.

Przykład 27.

$15 + 65 = 80$
 $46 + 16 + 34 = 96$
 $80 + 8 = 88$
 $96 - 8 = 88$
 $96 + 88 = 184$
 $34 + 8 = 42$
 $184 - 100\%$
 $42 - x$
 $x = \frac{42 \cdot 100}{184}$
 $x = \frac{4200}{184}$
 $x \approx 22\%$

odp. ~~około~~ Około 22% wszystkich uczestników brało udział w turnieju tenisa stołowego.

błędna interpretacja liczby wszystkich dziewcząt, których było o 8 więcej niż chłopców

Dla tej grupy zdających największą trudność stanowiło nie samo wykonanie obliczeń procentowych, lecz poprawne ustalenie danych niezbędnych do ich przeprowadzenia. Popoławane błędy wynikały przede wszystkim z niepoprawnej interpretacji zależności „o 8 więcej”, pomijania jednej z grup uczestników turnieju, wyboru niewłaściwych wartości

do obliczenia szukanego procentu, a także błędów rachunkowych w prostych działaniach, oraz błędów przy przepisywaniu danych z tabeli.

Najtrudniejszym dla zdających zadaniem w tym obszarze było **zadanie 20.**, za które można było uzyskać 3 punkty. Zadanie dotyczyło geometrii na płaszczyźnie, a jego poziom wykonania jest równy 47%.

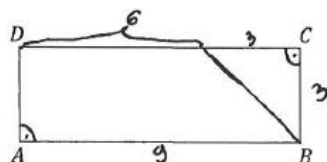
Na sukces w rozwiązywaniu tego zadania wpływało opanowanie kilku umiejętności. Zdający musieli wykazać się wyobraźnią geometryczną, znajomością własności równoległoboku oraz trójkąta równoramiennego prostokątnego, a także umiejętnością zastosowania twierdzenia Pitagorasa do obliczenia długości przeciwprostokątnej w takim trójkącie. Istotne było również poprawne obliczenie obwodu równoległoboku oraz wykonanie działań na pierwiastkach, obliczenie pierwiastka z iloczynu i wyłączanie czynnika przed znak pierwiastka.

Maksymalną liczbę punktów za to zadanie uzyskało nieco ponad 38% zdających.

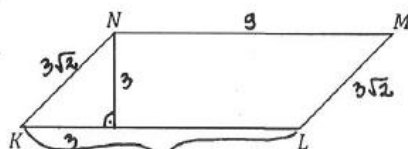
Uczniowie do rozwiązania tego zadania często wykorzystywali rysunki zamieszczone w arkuszu egzaminacyjnym lub wykonywali własne szkice pomocnicze, które ułatwiały im analizę treści zadania.

Przykłady 28.–31. przedstawiają poprawne rozwiązania zadania. W przykładach 28. i 29. zdający obliczyli długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego równoramiennego, wykorzystując twierdzenie Pitagorasa, a następnie poprawnie wyznaczyli obwód równoległoboku $KLMN$. W przykładzie 28. zdający dodatkowo poprawnie wyłączył czynnik przed znak pierwiastka.

Przykład 28.



Rysunek 1.



Rysunek 2.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$3^2 + 3^2 = c^2$$

$$9 + 9 = c^2$$

$$18 = c^2 / \sqrt{}$$

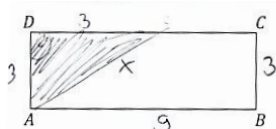
$$\sqrt{18} = c$$

$$3\sqrt{2} = c$$

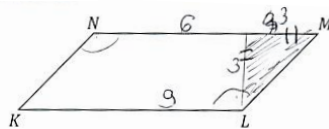
$$\begin{aligned} Obw_{KLMN} &= 9 + 9 + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = \\ &= 18 + 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

Odpr. Obwód równoległoboku wynosi $18 + 6\sqrt{2}$.

$$\begin{array}{r} 18 \sqrt{2} \\ 3 \sqrt{3} \\ 3 \sqrt{3} \\ 1 \sqrt{3\sqrt{2}} \end{array}$$

Przykład 29.

Rysunek 1.



Rysunek 2.

$$x^2 = 3^2 + 3^2$$

$$x^2 = 9 + 9$$

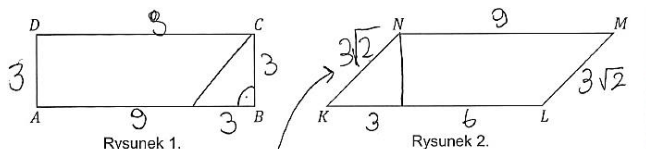
$$x = \sqrt{18}$$

↓

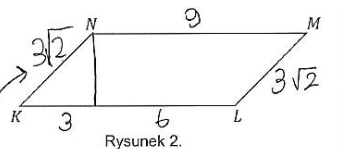
odp.

$$\text{Obw} = 9 + 9 + 2\sqrt{18} = 18 + 2\sqrt{18}$$

W przykładzie 30. przedstawiono rozwiązanie, w którym uczeń skorzystał ze wzoru na długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego równoramiennego o przyprostokątnej długości a . Następnie bez błędów rachunkowych obliczył obwód równoległoboku $KLMN$.

Przykład 30.

Rysunek 1.



Rysunek 2.

$$x = 3\sqrt{2}$$

ustalenie długości przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego równoramiennego o przyprostokątnej długości 3

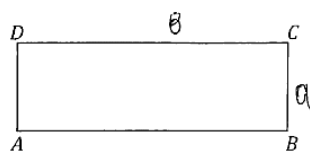
$$9 - 3 = 6$$

$$\text{Ob} = 3 + 6 + 3 + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$$

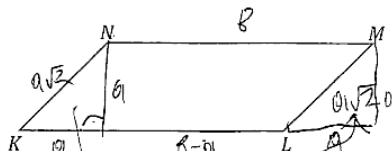
$$\text{Ob} = 18 + 6\sqrt{2}$$

Na uwagę zasługuje rozwiązanie zaprezentowane w przykładzie 31., które jest ilustracją uogólnionego podejścia do rozwiązania tego zadania. Uczeń opisał długości boków równoległoboku za pomocą wyrażeń algebraicznych, a następnie, wykorzystując otrzymane zależności, wyprowadził wzór na obwód równoległoboku $KLMN$. W kolejnym etapie, po podstawieniu danych z treści zadania, poprawnie obliczył jego obwód. Takie rozwiązanie świadczy o umiejętności uogólniania zależności geometrycznych oraz sprawnym posługiwaniu się wyrażeniami algebraicznymi.

Przykład 31.



Rysunek 1.



Rysunek 2.

Oblicz obwód równoległoboku $KLMN$. Zapisz obliczenia.

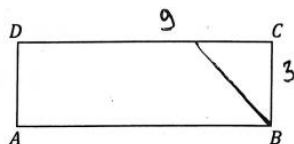
$$\text{Op } \text{obw } KLMN = a\sqrt{2} + a\sqrt{2} + b + b = 2a\sqrt{2} + 2b$$

$$2a\sqrt{2} + 2b = 2 \cdot 3\sqrt{2} + 2 \cdot 6 = 6\sqrt{2} + 12$$

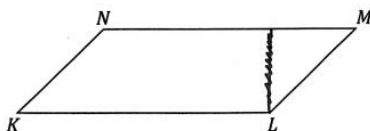
Prawie 9% ósmoklasistów za rozwiązanie zadania 20. uzyskało 2 punkty. Taki wynik otrzymywali uczniowie, którzy przedstawili poprawny sposób obliczenia obwodu równoległoboku $KLMN$, jednak nie uzyskali prawidłowego wyniku końcowego z powodu błędów rachunkowych.

Przykłady 32. i 33. pokazują najczęściej popełniane błędy. Wskazują one przede wszystkim na brak umiejętności wykonywania działań na wyrażeniach zawierających liczby wymierne i niewymierne, w szczególności w poprawnym dodawaniu takich liczb.

Przykład 32.



Rysunek 1.



Rysunek 2.

$$3^2 + 3^2 = x^2 \quad x = 3\sqrt{2}$$

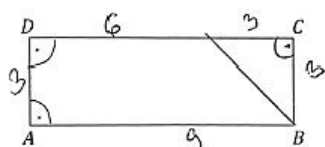
$$18 = x^2$$

$$\text{Obw } KLMN = 18 + 6\sqrt{2} = 24\sqrt{2}$$

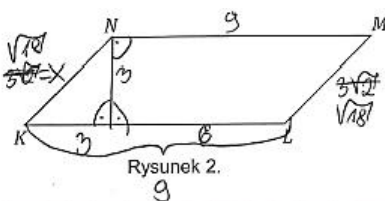
Op. Obwód równoległoboku $KLMN$ wynosi $24\sqrt{2}$.

błędne dodawanie liczb
wymiernej i niewymiernej

Przykład 33.



Rysunek 1.



Rysunek 2.

$$3^2 + 3^2 = x^2$$

$$x^2 = 9 + 9$$

$$x^2 = 18 \quad | \sqrt{}$$

$$x = \sqrt{9 \cdot 2}$$

$$x = 3\sqrt{2}$$

$$\text{Obw.} = 3\sqrt{2} + 9 + 3\sqrt{2} + 9 = 18 + 12 = 30$$

$$3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2} = 6 \cdot 2 = 12$$

Odp.: Obwód tego równoległoboku wynosi ²⁴ ~~30~~.

$$\begin{array}{r} 18 \\ + 18 \\ \hline 36 \end{array}$$

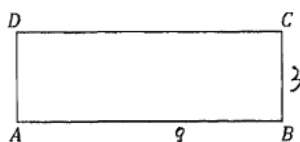
$$\text{Obw.} = 9 + 9 + \sqrt{18} + \sqrt{18} = 18 + 6 = 24$$

$$\sqrt{18+18} = \sqrt{36} = 6$$

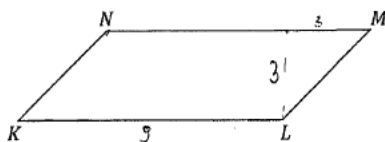
błędne dodawanie liczb niewymiernych

Przykład 34. jest ilustracją rozwiązania, w którym zdający poprawnie obliczył obwód równoległoboku, ale zastąpił liczbę niewymierną jej przybliżeniem, co uniemożliwiło uzyskanie maksymalnej liczby punktów.

Przykład 34.



Rysunek 1.



Rysunek 2.

$$3^2 + 3^2 = x^2$$

$$9 + 9 = x^2$$

$$18 = x^2$$

$$x = \sqrt{18}$$

$$x = \sqrt{2 \cdot 9}$$

$$x = 3\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} 9-3 &= 6 \\ p_{\square} &= \frac{(9+6) \cdot 3}{2} \\ p &= \frac{45}{2} \\ p &= 22,5 \end{aligned}$$

$$\sqrt{2} \approx 1,41$$

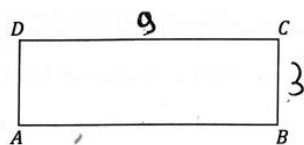
$$\text{Obw.} = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 9 + 9 = 6\sqrt{2} + 18 = 8,4 + 18 = 26,4$$

Odp.: Obwód równoległoboku KLMN wynosi ^{26,4} ~~(6\sqrt{2} + 18)~~.

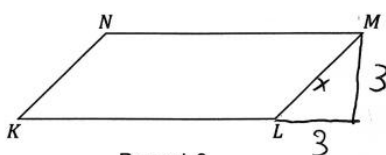
Prawie 9% wszystkich zdających otrzymało za rozwiązanie tego zadania 1 punkt. Ten punkt można było uzyskać za przedstawienie poprawnego sposobu obliczenia długości przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego równoramiennego z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa lub za ustalenie dokładnej długości przeciwprostokątnej tego trójkąta bez przedstawienia sposobu jej obliczenia. Jeden punkt otrzymywali również uczniowie, którzy nie poradzili sobie z poprawnym obliczeniem obwodu równoległoboku.

W przykładzie 35. pokazano rozwiązanie, w którym zdający, mimo że poprawnie obliczył długość boku LM równoległoboku, nie wykorzystał tej wartości w dalszej części rozwiązania i błędnie obliczył obwód równoległoboku $KLMN$.

Przykład 35.



Rysunek 1.



Rysunek 2.

$$3^2 + 3^2 = x^2 \quad L = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 6 = 6 + 12 = 18 \text{ cm}$$

$$9 + 9 = x^2$$

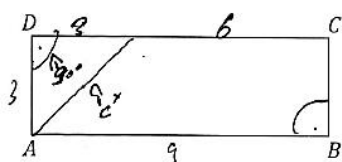
$$x = \sqrt{18}$$

Odp: Obwód równoległoboku wynosi 18 cm.

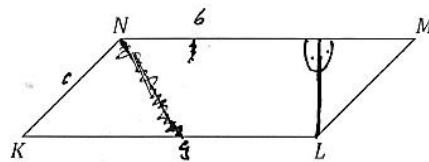
błędny sposób obliczenia obwodu równoległoboku

W przykładzie 36. przedstawiono rozwiązanie, w którym uczeń zapisał błędną długość boku NM równoległoboku jako 6 i tę wartość zastosował do obliczenia obwodu równoległoboku.

Przykład 36.



Rysunek 1.



Rysunek 2.

błędna wartość długości boku NM

$$\begin{aligned} 3^2 + 3^2 &= c^2 \\ 9 + 9 &= c^2 \\ c^2 &= 18 \quad \sqrt{} \\ c &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

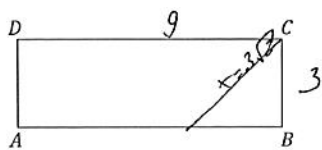
$$Obw = 9 + 6 + 2 \cdot 3\sqrt{2} = 15 + 6\sqrt{2}$$

Odp: Obwód ~~trójkąta~~ równoległoboku wynosi $15 + 6\sqrt{2}$.

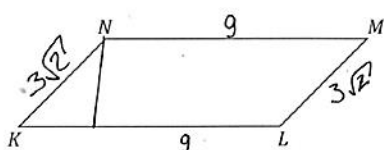
niepoprawny sposób obliczenia obwodu równoległoboku

Rozwiązanie, w którym zdający błędnie zinterpretował polecenie i zamiast obliczyć obwód równoległoboku obliczył jego pole, ilustruje przykład 37.

Przykład 37.



Rysunek 1.



Rysunek 2.

$$\begin{aligned} 3^2 + 3^2 &= x^2 \\ 9 + 9 &= x^2 \\ 18 &= x^2 \\ x &= \sqrt{18} \\ x &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

~~PANA~~

$$\begin{aligned} P &= a \cdot h \\ P &= 9 \cdot 3 = 27 \end{aligned}$$

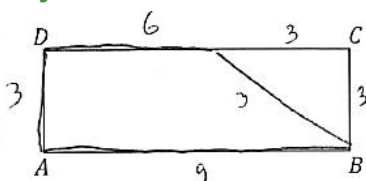
$$\begin{array}{r} 18 : 2 \\ 9 : 3 \\ 3 : 3 \\ 1 \end{array}$$

obliczenie pola równoległoboku

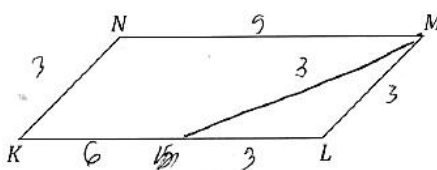
Odp: Pole wynosi 27

Około 44% zdających nie poradziło sobie z rozwiązaniem tego zadania i otrzymało 0 punktów. W tej grupie byli ósmoklasiści, którzy mieli trudności z dostrzeżeniem podziału prostokąta $ABCD$ na trójkąt prostokątny równoramienny i trapez, z których powstał równoległobok $KLMN$. Tego rodzaju błędy są zaprezentowane w przykładach 38. oraz 39.

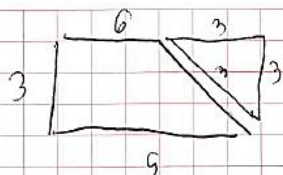
Przykład 38.



Rysunek 1.

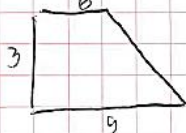


Rysunek 2.

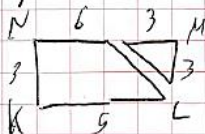
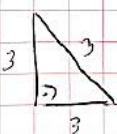


$$\begin{aligned} \text{Odw: } 3 \cdot 2 + 9 &= 2 \cdot 3 \\ &= 6 + 18 = 24 \text{ cm} \end{aligned}$$

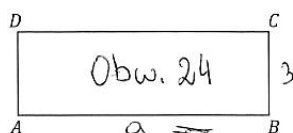
trapez prostokątny:



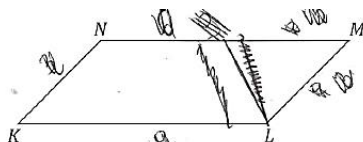
trójkąt prostokątny równoramienny:



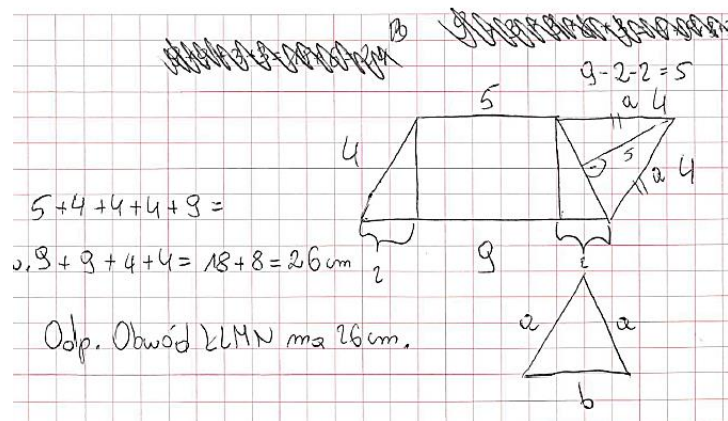
Odp: Obw. równoległoboku wynosi 24 cm.

Przykład 39.

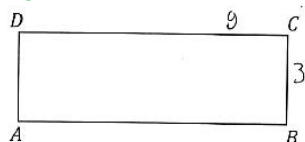
Rysunek 1.



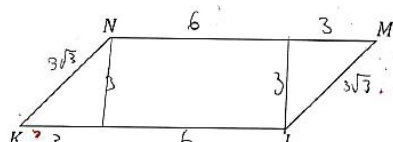
Rysunek 2.



Kolejną grupę zdających, którzy nie otrzymali punktów za rozwiązanie tego zadania, stanowili uczniowie, którzy nie potrafili poprawnie obliczyć ani ustalić długości przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego równoramiennego (przykłady 40.–42.) oraz ósmoklasiści, którzy nie podjęli próby rozwiązania zadania.

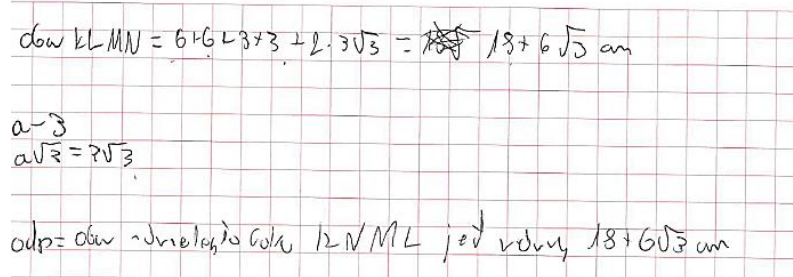
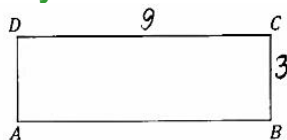
Przykład 40.

Rysunek 1.

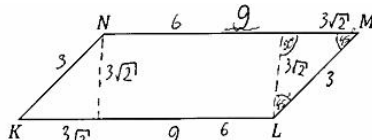


Rysunek 2.

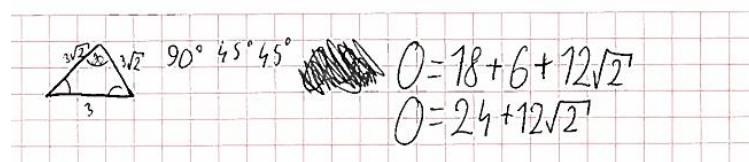
niepoprawne ustalenie długości krótszego boku równoległoboku

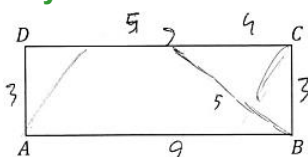
**Przykład 41.**

Rysunek 1.

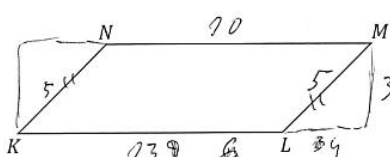


Rysunek 2.

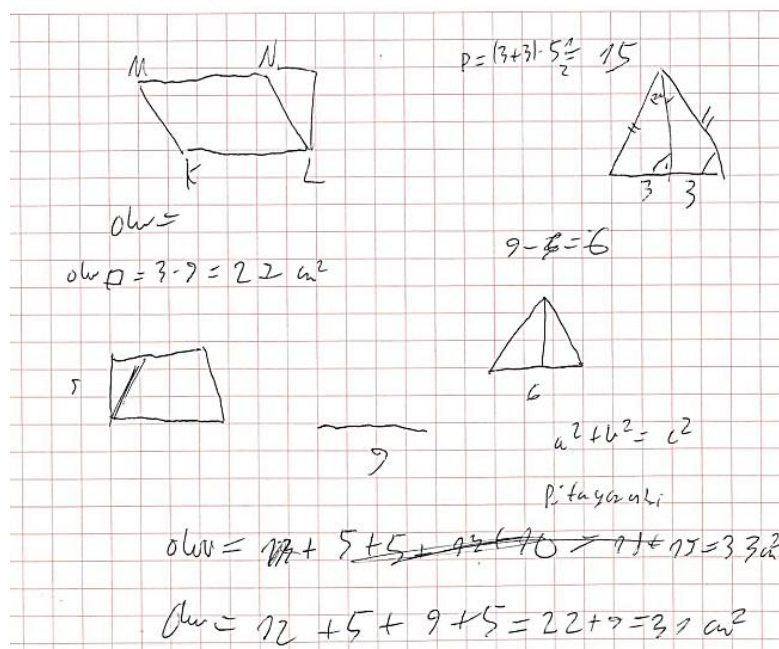


Przykład 42.

Rysunek 1.



Rysunek 2.



Mimo zamieszczonych w zadaniu 20. rysunków trudnością w rozwiązaniu zadania okazało się zarówno poprawne zinterpretowanie podziału prostokąta na trójkąt i trapez, jak również poprawne zbudowanie z tych figur równoległoboku. Ponadto zdający mieli problem z obliczeniem lub ustaleniem długości przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego równoramiennego, a tym samym z wyznaczeniem długości krótszego boku równoległoboku. Część uczniów podawała błędną długość dłuższego boku równoległoboku.

Umiejętności z trzeciego wymagania ogólnego – **wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji** – były sprawdzane dziewięcioma zadaniami, w tym siedmioma zadaniami zamkniętymi (zadania 5., 8., 9., 10., 11., 13. i 14.), oraz dwoma zadaniami otwartymi (zadania 15. i 19.).

Najłatwiejsze w tej grupie okazało się **zadanie 11.** – prawidłowej odpowiedzi udzieliło 79% zdających. Poprawne rozwiązanie zadania wymagało wyznaczenia miary kąta wewnętrznego β czworokąta, wiedząc, że jest ona o 70° większa od miary kąta wewnętrznego α . Należało oznaczyć miary kątów, uwzględniając zależności między nimi, oraz wykorzystać własności sumy kątów wewnętrznych czworokąta. Blisko 7% zdających poprawnie wyznaczyło miarę kąta α , ale błędnie przypisało tę miarę kątowi β . Poprawny tok rozumowania pokazano w przykładzie 43.

Przykład 43.

$\alpha = x = 50^\circ$
 $\beta = x + 70^\circ = 50^\circ + 70^\circ = 120^\circ$
 $\gamma = 2x = 100^\circ$
 $\delta = 90^\circ$

$x + x + 70^\circ + 2x + 90^\circ = 360^\circ$
 $4x + 160^\circ = 360^\circ \quad | -160^\circ$
 $4x = 200^\circ$
 $x = 50^\circ$

$\beta = x + 70^\circ = 50^\circ + 70^\circ = 120^\circ$

W **zadaniu 5**, należało na podstawie informacji przedstawionych w treści zadania wskazać poprawne wyrażenie algebraiczne opisujące koszt zakupu kotów z hodowli. Opis dotyczył cen kocurów i kotek po obniżce o określony procent ceny wyjściowej. Poprawnej odpowiedzi udzieliło 74% zdających. Prawidłowe rozumowanie ilustruje przykład 44. Brak litery y przy ułamku $0,2$ jest usterką, która nie wpłynęła na wybór poprawnej odpowiedzi.

Przykład 44.

5. $x \rightarrow$ cena kocura
 $y \rightarrow$ cena kotki

$x - 40\% x = x - 0,4x = 0,6x$
 $y - 20\% y = y - 0,2y = 0,8y$

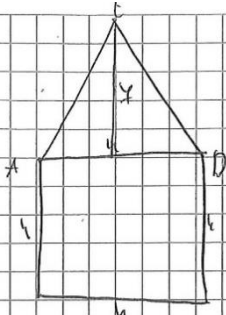
$0,6x + 0,8y$

Zadaniem, z którym również poradziło sobie przeszło 70% ósmoklasistów, było **zadanie 9**. Wymagało ono od zdających umiejętności obliczania średniej arytmetycznej. W przykładzie 45. przedstawiono rozwiązanie, w którym uczeń zastosował poprawny sposób rozwiązywania zadania, jednak w ostatnim kroku popełnił błąd rachunkowy. Takiego błędu można było uniknąć, wykonując sprawdzenie wyniku działaniem odwrotnym. Niepoprawną odpowiedź z liczbą 6 wskazało około 9% zdających.

Przykład 45.

$x + y = 4 \quad | \cdot 2$
 $2x + 2y = 8$
 $x + y + z = 5 \quad | \cdot 3$
 $3x + 3y + 3z = 15$
 $8 + 3z = 15 \quad | -8$
 $3z = 7$
 $z = 6$

Nieco trudniejsze okazało się **zadanie 13.**, którego poziom wykonania jest równy 65%. Polegało ono na obliczeniu pola kwadratu na podstawie pola trójkąta zbudowanego na jego boku oraz wysokości tego trójkąta. Treść zadania dodatkowo była uzupełniona rysunkiem. W przykładach 46. i 47. pokazano błędy popełniane podczas rozwiązywania zadania. Około 8% zdających wybrało odpowiedź 16, grupa 9% zdających wskazała liczbę 32, a blisko 17% zaznaczyło liczbę 49 jako wartość poszukiwanego pola kwadratu.

Przykład 46.


$P = a \cdot h$
 $28 = a \cdot 7$
 $28 = 7a \quad | :7$
 $4 = a$
 $P_{ABCD} = 4^2$
 $P_{ABCD} = 16$

zastosowanie niepoprawnego wzoru na pole trójkąta
– brak współczynnika $\frac{1}{2}$

Przykład 47.

$P_{ADE} = \frac{a \cdot h}{2}$
 $28 = \frac{a \cdot 7}{2} \quad | \cdot 2$
 $56 = a \cdot 7 \quad | :7$
 $a = 8$
 $P_{ABCD} = 4 \cdot 8 = 32$

poprawny sposób obliczenia długości podstawy trójkąta

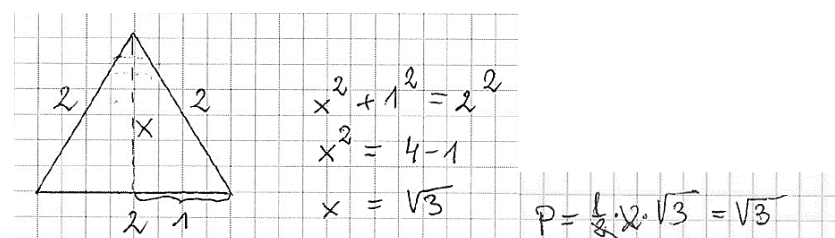
błędny sposób obliczenia pola kwadratu

Kolejnym zadaniem było **zadanie 10.** typu prawda-falsz, które poprawnie rozwiązało 61% uczniów. W zadaniu należało ocenić, czy przy danej długości boku trójkąta równobocznego podane wartości jego wysokości i pola są poprawne.

Blisko 22% zdających niepoprawnie oceniło pierwsze zdanie dotyczące wysokości trójkąta, natomiast co czwarty zdający drugie zdanie odnoszące się do pola tej figury.

Przykład 48. ilustruje prawidłowy sposób rozwiązania zadania zamieszczony w brudnopisie.

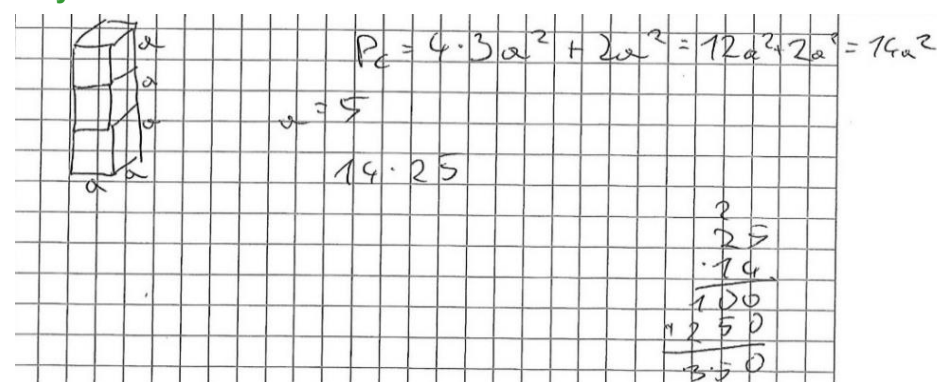
Przykład 48.



Zadanie 14. wymagało od zdających obliczenia pola powierzchni całkowitej prostopadłościanu otrzymanego przez ustawienie trzech sześciątów o krawędzi długości 5 jeden na drugim. Poprawnej odpowiedzi udzieliło 58% uczniów.

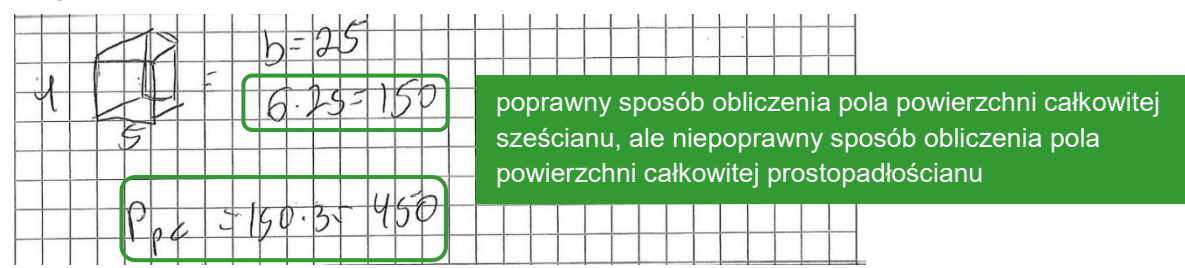
Przykład 49. ilustruje w pełni poprawną metodę rozwiązania tego zadania.

Przykład 49.



Za rozwiązania przedstawione w przykładach 50.–53. ósmoklasiści otrzymali 0 punktów. Przykład 50. jest ilustracją rozwiązania, w którym zdający błędnie zinterpretował pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jako sumę pól powierzchni całkowitych trzech sześciątów. Taka strategia byłaby poprawna przy obliczaniu objętości bryły, jednak nie prowadzi do wyznaczenia pola powierzchni całkowitej prostopadłościanu. Błąd ten popełniło blisko 12% zdających.

Przykład 50.



W przykładzie 51. pokazano rozwiązanie, w którym zdający zastosował niepoprawną metodę obliczenia pola powierzchni całkowitej prostopadłościanu, jako sumę pól powierzchni całkowitych trzech sześcianów. Ponadto w pierwszym etapie popełnił błąd przy obliczaniu pola powierzchni całkowitej sześcianu, uwzględniając pole tylko jednej podstawy zamiast dwóch. 22% uczniów wskazało liczbę 375 jako poprawną odpowiedź.

Przykład 51.

$$P = P_p + P_b \cdot 4$$

$$P = 25 + 100 = 125$$

$$125 \cdot 3 =$$

$$\begin{array}{r} 125 \\ \times 3 \\ \hline 375 \end{array}$$

niepoprawny sposób obliczenia pola powierzchni całkowitej sześcianu

W przykładzie 52. przedstawiono rozwiązanie, w którym uczeń, w odróżnieniu od autorów poprzednich rozwiązań, zastosował inną strategię. Poprawnie zauważył, że ściany, którymi stykają się ustawione jeden na drugim sześciany, nie należą do powierzchni całkowitej prostopadłościanu. Błąd polegał jednak na odjęciu pól dwóch ścian sześcianu zamiast czterech. Taką odpowiedź wybrało 7% zdających.

Przykład 52.

$$P_p = P_p + P_b$$

$$P_p = 5 \cdot 5 = 25$$

$$P_p = 5 \cdot 5 \cdot 6 = 25 \cdot 6 = 150$$

$$P_p = 150 \cdot 3 = 450$$

$$- 5 \cdot 5 \cdot 2 = - 50$$

$$= 450 - 50 = 400$$

niepoprawny sposób obliczenia pola powierzchni całkowitej prostopadłościanu

Kolejny przykład 53. ilustruje rozwiązanie, w którym zdający, zamiast obliczyć pole powierzchni całkowitej bryły, obliczył jej objętość.

Przykład 53.

$$P = a \cdot b \cdot c$$

$$P = 5 \cdot 5 \cdot 15$$

$$P = 25 \cdot 15$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 15 \\ \hline 125 \\ 250 \\ \hline 375 \end{array}$$

W zadaniu 14. część zdających obliczała sumę pól powierzchni całkowitych trzech sześcianów, nie uwzględniając, że po złożeniu prostopadłościanu, pola czterech ścian tych sześcianów należy odjąć, ponieważ znajdują się wewnątrz utworzonej bryły i nie należą do jej powierzchni. Inni zamiast wzoru na pole powierzchni stosowali wzór na objętość. Wyniki tego zadania wskazują, że doskonalenia wymaga nie tyle pamięciowe opanowanie wzorów, ile umiejętność rozpoznawania wielkości matematycznych, interpretowania wzorów oraz świadomego doboru odpowiednich narzędzi do rozwiązania postawionego problemu.

Najtrudniejszym spośród zadań sprawdzających umiejętności z trzeciego wymagania ogólnego okazało się **zadanie 8.**, które poprawnie rozwiązało 49% ósmoklasistów. Było to zadanie zamknięte wielokrotnego wyboru. W pierwszej części należało obliczyć wartość liczbową wyrażenia algebraicznego, a w drugiej – przekształcić to wyrażenie do postaci sumy algebraicznej. Przykład 54. ilustruje w pełni poprawne rozwiązanie.

Przykład 54.

$$S = \frac{1}{2} n(n+1) = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 100(100+1) = 50(101)$$

$$\frac{1}{2} \cdot 100(100+1) = 50 \cdot 101$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ \cdot 50 \\ \hline 5050 \end{array}$$

Natomiast rozwiązania częściowo poprawne przedstawiono w przykładach 55. i 56. W przykładzie 55. zdający poprawnie obliczył wartość liczbową wyrażenia algebraicznego – ten etap rozwiązania poprawnie wykonało 67% zdających – jednak nie wykonał prawidłowego przekształcenia do postaci sumy algebraicznej. Z kolei przykład 56. jest ilustracją rozwiązania, w którym uczeń poprawnie wymnożył jednomian przez sumę algebraiczną – tą umiejętnością wykazało się 64% zdających – lecz nie poradził sobie z obliczeniem wartości liczbowej wyrażenia.

Przykład 55.

$$S = \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 100(100+1) = 50(100+1) = 50 \cdot 101 = 5050$$

$$S = \frac{1}{2} n(n+1) = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ \cdot 50 \\ \hline 5050 \end{array}$$

błędny sposób przekształcenia wzoru na sumę

Przykład 56.

$$S = \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$\frac{1}{2} \cdot 100 = 50$$

$$50(100+1) = 5000 + 1 = 5001$$

$$S = \frac{1}{2} n(n+1) = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ \cdot 50 \\ \hline 5050 \end{array}$$

błędny sposób obliczenia sumy stu kolejnych liczb naturalnych

Zadanie 15., otwarte, sprawdzające trzecie wymaganie ogólne, okazało się dla tegorocznych ósmoklasistów trudne – poziom jego wykonania wyniósł 56%. Zadanie wymagało umiejętności rozwiązywania problemu osadzonego w kontekście praktycznym. Zdający mogli wykorzystać wiedzę z zakresu arytmetyki, zapisać i rozwiązać równanie pierwszego stopnia z jedną niewiadomą albo zastosować własne strategie rozwiązania problemu.

Celem zadania było obliczenie liczby kartek niebieskich na podstawie podanych informacji o łącznej liczbie kartek oraz zależnościach między liczbami kartek w trzech kolorach: czerwonym, niebieskim i zielonym.

Nieco powyżej 45% zdających bezbłędnie rozwiązało to zadanie i otrzymało 2 punkty.

W przykładach 57.–59. przedstawiono najczęściej stosowane przez ósmoklasistów prawidłowe sposoby rozwiązania. We wszystkich tych rozwiązaniach zdający zapisali poprawne równanie z jedną niewiadomą, umożliwiające wyznaczenie liczby kartek w jednym z trzech kolorów: czerwonym, niebieskim lub zielonym. Następnie poprawnie rozwiązali równanie i obliczyli liczbę kartek w kolorze niebieskim.

Przykład 57. ilustruje najczęściej wybieraną strategię rozwiązania. Zdający zapisał równanie z jedną niewiadomą prowadzące do obliczenia liczby kartek w kolorze czerwonym, a następnie, wykorzystując otrzymany wynik oraz informacje podane w treści zadania, wyznaczył liczbę kartek w kolorze niebieskim.

Przykład 57.

$$\left. \begin{array}{l} \text{białe} = 37 \\ \text{niebieskie} = 1,5x \\ \text{czerwone} = x \\ \text{zielone} = x - 10 \end{array} \right\} 160 \text{ kartek łącznie}$$

$$37 + 1,5x + x + x - 10 = 160$$

$$1,5x + x + x = 160 - 37 + 10$$

$$3,5x = 133 \quad / : 3,5$$

$$x = 38$$

$$\text{niebieskie} = 1,5 \cdot 38 = 57$$

$$\text{czerwone} = 38$$

$$\text{zielone} = 38 - 10 = 28$$

poprawne równanie z jedną niewiadomą, prowadzące do obliczenia liczby kartek w kolorze czerwonym

poprawny sposób obliczenia liczb kartek w trzech kolorach

Odp: Ela przygotowała 57 kartek niebieskich.

W przykładzie 58. zaprezentowano rozwiązanie, w którym zdający zapisał równanie z jedną niewiadomą prowadzące do obliczenia liczby kartek w kolorze zielonym. Następnie, korzystając z zapisanych wyrażeń algebraicznych, wyznaczył liczbę kartek w kolorze niebieskim.

Przykład 58.

Łącznie było kartek - 160

$$B = 37$$

$$N = 1,5 \cdot (x + 10) = 1,5x + 15$$

$$Z = x$$

$$C = x + 10$$

$$37 + 1,5x + 15 + x + x + 10 = 160$$

$$3,5x = 160 - 37 - 25$$

$$3,5x = 160 - 62$$

$$3,5x = 98 : 3,5$$

$$3,5x = x = 28$$

$$N = 1,5x + 15 = 1,5 \cdot 28 + 15 = 42 + 15 = 57$$

poprawne równanie z jedną niewiadomą,
prowadzące do obliczenia liczby kartek
w kolorze zielonym

$$98 : 3\frac{1}{2} = 98 \cdot \frac{2}{7} = 28$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 1,5 \\ \hline 140 \\ 280 \\ \hline 42,0 \end{array}$$

poprawny sposób
obliczenia liczby kartek
w kolorze niebieskim

Analiza rozwiązań uczniowskich wskazuje, że wielu uczniów obliczało liczbę kartek w trzech kolorach i wykonywało sprawdzenie, aby potwierdzić poprawność otrzymanych wyników, co ilustruje przykład 59.

Zdający oznaczył niewiadomą x liczbę kartek niebieskich, zapisał poprawne równanie, rozwiązał je i otrzymał liczbę kartek w tym kolorze. Następnie obliczył liczbę kartek w pozostałych kolorach i wykonał sprawdzenie.

Przykład 59.

160 - Trzynie wszystkie (B+N+Z+C)

$$B = 37$$

$$N = x = 57$$

$$Z = \frac{x}{1,5} - 10 = \frac{2}{3}x - 10 = \frac{2}{3} \cdot 57 - 10 = 2 \cdot 19 - 10 = 28$$

$$C = \frac{x}{1,5} = \frac{x}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x = \frac{2}{3} \cdot 57 = 19 \cdot 2 = 38$$

$$37 + \frac{2}{3}x - 10 + \frac{2}{3}x + x = 160$$

$$1\frac{4}{3}x = 160 + 10 - 37$$

$$\frac{7}{3}x = 133 \quad | : \frac{7}{3}$$

$$x = 133 \cdot \frac{3}{7} = 19 \cdot 3 = 57$$

odp. Niebieskich było 57.

sprawdzenie
otrzymanych wyników

poprawne równanie z jedną niewiadomą,
prowadzące do obliczenia liczby kartek
w kolorze niebieskim

W przykładzie 60. przedstawiono rozwiązanie, w którym zdający zapisał poprawne wyrażenia algebraiczne opisujące liczbę kartek w kolorach niebieskim, zielonym i czerwonym. Następnie zapisał poprawne wyrażenia arytmetyczne prowadzące do obliczenia liczby kartek niebieskich i wykonał sprawdzenie.

Przykład 60.

$$K=160$$

$$B=37$$

$$160 - 37 = 123$$

$$N=1,5x$$

$$Z=x-10$$

$$C=x$$

$$123 + 10 = 133$$

$$133 : 3,5 = 38$$

$$C=38$$

$$Z=38-10=28$$

$$N=38 \cdot 1,5=57$$

Odp: Ela przygotowała 57 niebieskich
 kartek.

Sprawdzenie

$$37 + 38 + 28 + 57 = 75 + 85 = 160$$

poprawne wyrażenia arytmetyczne prowadzące do obliczenia liczby kartek w kolorze czerwonym

sprawdzenie otrzymanych wyników

Okolo 21% zdających otrzymało za rozwiązanie tego zadania 1 punkt. Do tej grupy należeli uczniowie, którzy zapisali poprawne równanie, lecz nie poradzili sobie z dalszą częścią rozwiązania zadania.

Przykłady 61. i 62. są ilustracją rozwiązań, w których do uzyskania pełnej liczby punktów zabrakło poprawności rachunkowej i refleksji nad sensownością otrzymanego wyniku – liczba kartek powinna być liczbą całkowitą dodatnią. Analiza prac uczniowskich wykazała, że wielu zdających miało trudności z dzieleniem liczby całkowitej przez liczbę dziesiętną.

Przykład 61.

kartki białe - 37
 kartki niebieskie - $1,5x$
 kartki czerwone - x
 kartki zielone - $x-10$

$$x + (x - 10) + 1,5x = 123$$

$$2x - 10 + 1,5x = 123$$

$$3,5x = 133 \quad | : 3,5$$

$$x = 39$$

błąd rachunkowy

$$\text{kartki niebieskie} - 39 \cdot 1,5 = 58,5$$

Odp: Ela przygotowała 58,5 kartek niebieskich

brak refleksji nad sensownością otrzymanego wyniku liczbowego

Przykład 62.

wszystkie kartki = 160

Białe - 37
Niebieskie - $1,5x$
Czerwony - $x \cdot 3,4$
Zielony - $x - 10$

$$\begin{aligned} 160 &= 37 + 1,5x + x + x - 10 \\ 160 &= 37 - 10 + 3,5x \\ 160 &= 27 + 3,5x \quad | - 27 \\ 133 &= 3,5x \quad | : 3,5 \\ x &= 38 \end{aligned}$$

błąd rachunkowy

szukane - niebieskie
kartki

W przykładach 63. i 64. pokazano rozwiązania uczniów, którzy zapisali poprawne równanie z jedną niewiadomą prowadzące do obliczenia liczby kartek czerwonych, lecz nie poradzili sobie z poprawnym przekształceniem tego równania.

Przykład 63.

Łącznie = 160

$$\begin{aligned} \text{Białe} &= 37 \\ \text{niebieskie} &= x \cdot 1,5 \\ \text{zielony} &= x - 10 \\ \text{czerwony} &= x \end{aligned}$$

$$37 + x \cdot 1,5 + (x - 10) + x = 160 \quad | - 37$$

$$123 = x \cdot 1,5 + (x - 10) + x$$

$$37 + x + (x \cdot 1,5) + (x - 10) = 160$$

$$37 + x + 1,5x$$

brak przekształcenia równania

Przykład 64.

160

37 białych

x - czerwone

$x \cdot 1,5$ - Niebieskie

$x - 10$ - zielone

$$x + x \cdot 1,5 + x - 10 + 37 = 160$$

$$x + x + x = 160 : 1,5 - 10 - 37$$

$$3x =$$

$$\begin{array}{r} 160 : 1,5 \\ \underline{150} \\ 10 \end{array}$$

błąd przekształcenia równania

Ponad 33% uczniów otrzymało za rozwiązanie tego zadania 0 punktów.

W tej grupie znaleźli się uczniowie, którzy błędnie opisali liczby kartek w trzech kolorach i nie poradzili sobie z zapisaniem poprawnego równania z jedną niewiadomą, prowadzącego do obliczenia liczby kartek w jednym spośród tych kolorów lub zapisali poprawne wyrażenia arytmetyczne opisujące liczby kartek, ale nie ułożyli równania.

W przykładzie 65. przedstawiono rozwiązanie, w którym zdający zapisał niepoprawne wyrażenie algebraiczne jednej zmiennej opisujące liczbę kartek zielonych i ułożył błędne równanie.

Przykład 65.

czerwone x
 kartki białe $- 37$
 kartki niebieskie $- x \cdot 1,5$
 kartki zielone $- 10 - x$

błędne wyrażenie algebraiczne
opisujące liczbę kartek zielonych

$$x + 37 + x \cdot 1,5 + 10 - x = 160$$

błędne równanie

$$37x + x \cdot 1,5 + 10 - x$$

$$37x + 1,5x + 10 - x$$

$$38,5x + 10 - x$$

$$48,5x + 10$$

Rozwiązanie, w którym zdający zapisał poprawne wyrażenia opisujące liczby kartek w poszczególnych kolorach, jednak nie zapisał równania z jedną niewiadomą prowadzącego do wyznaczenia poszukiwanej liczby kartek ilustruje przykład 66.

Przykład 66.

suma $= 160$

$$160 - 37 = 123$$

białe $= 37$

niebieskie $= 1,5x$

zielone $= x - 10$

czerwone $= x$

Do grupy uczniów, którzy nie otrzymali punktów za rozwiązanie tego zadania, należeli również ósmoklasiści, którzy błędnie zinterpretowali treść zadania i zapisali niepoprawne wyrażenia algebraiczne jednej zmiennej opisujące liczby kartek w poszczególnych kolorach, a tym samym ułożyli błędne równanie z jedną niewiadomą. Tego rodzaju rozwiązania zostały pokazane w przykładach 67. i 68.

Przykład 67.

$$\begin{aligned}
 &\left. \begin{aligned} \text{Białe} &= 37 \\ \text{Niebieskie} &= x \cdot 1,5 \\ \text{Czerwone} &= x \cdot 1,5 \\ \text{Zielone} &= x \cdot 1,5 - 10 \end{aligned} \right\} 160 \\
 &37 + x \cdot 1,5 + x \cdot 1,5 + x \cdot 1,5 - 10 = 160 \\
 &x \cdot 1,5 + x \cdot 1,5 + x \cdot 1,5 - 10 = 160 - 37 + 10 \\
 &x \cdot 1,5 + x \cdot 1,5 + x \cdot 1,5 = 133
 \end{aligned}$$

Przykład 68.

dane:

160 kartek – Łącznie wszystkich

37 kartek – białe

 x – kartki czerwone $1,5x$ – kartki niebieskie $\frac{x}{10}$ – kartki zielone

błędna interpretacja treści zadania – porównanie ilorazowe zamiast porównania różnicowego, opisującego liczby kartek zielonych i czerwonych

$$37 + x + 1,5x + \frac{x}{10} = 160 \quad | \cdot 10$$

błędne równanie

~~$$x + 1,5x + \frac{x}{10} =$$~~

$$370 + 10x + 15x + x = 1600$$

$$10x + 15x + x = 1600 - 370$$

$$26x = 1230 \quad | :26$$

$$x = 48 \rightarrow \text{kartki czerwone}$$

$$48 \cdot 1,5 = 72 \rightarrow \text{kartki niebieskie}$$

Odp: Ela przygotowała 72 niebieskich kartek.

W przykładzie 69. pokazano rozwiązanie, w którym uczeń nie poradził sobie z zapisaniem poprawnego wyrażenia arytmetycznego, prowadzącego do obliczenia liczby kartek.

Przykład 69.

$$160 : 4 = 40$$

$$160 - 40 = 120$$

$$B = 37$$

$$120 : 3 = 40$$

$$160 - 37 = 123 \quad 120 - 37 = 83$$

Analiza rozwiązań uczniowskich wskazuje, że wielu zdających miało trudności już na początkowym etapie rozwiązania – zapisywało niepoprawne wyrażenia algebraiczne opisujące liczby kartek przedstawionych w treści zadania. Pojawiały się również błędy przy układaniu równania. Znaczna grupa zdających miała ponadto trudności z dzieleniem liczby całkowitej przez liczbę dziesiętną.

Zadanie 19. otwarte okazało się dla ósmoklasistów umiarkowanie trudne – poziom jego wykonania wyniósł 62%. Było to zadanie tekstowe z geometrii, wymagające zbudowania modelu matematycznego dla sytuacji osadzonej w kontekście praktycznym. Warunkiem uzyskania maksymalnej liczby punktów było obliczenie kosztu zakupu nasion potrzebnych do obsiania ogródka w kształcie trapezu.

Pełne rozwiązanie obejmowało trzy etapy: obliczenie pola trapezu, ustalenie najmniejszej liczby opakowań nasion potrzebnych do obsiania ogródka oraz obliczenie kosztu ich zakupu. Zadanie sprawdzało zatem nie tylko umiejętność obliczania pola trapezu i sprawność rachunkową, lecz także umiejętność interpretowania wyniku w kontekście praktycznym, wymagającą uwzględnienia konieczności zakupu całych opakowań z nasionami.

Maksymalną liczbę punktów za rozwiązanie tego zadania uzyskało 49% zdających. Rozwiązania ocenione na 3 punkty zaprezentowano w przykładach 70.–72. Zdający poprawnie zastosowali wzór na pole trapezu do obliczenia pola ogródka, następnie wyznaczyli najmniejszą liczbę opakowań z nasionami potrzebnych do jego obsiania, a na końcu obliczyli koszt ich zakupu.

Przykład 70.

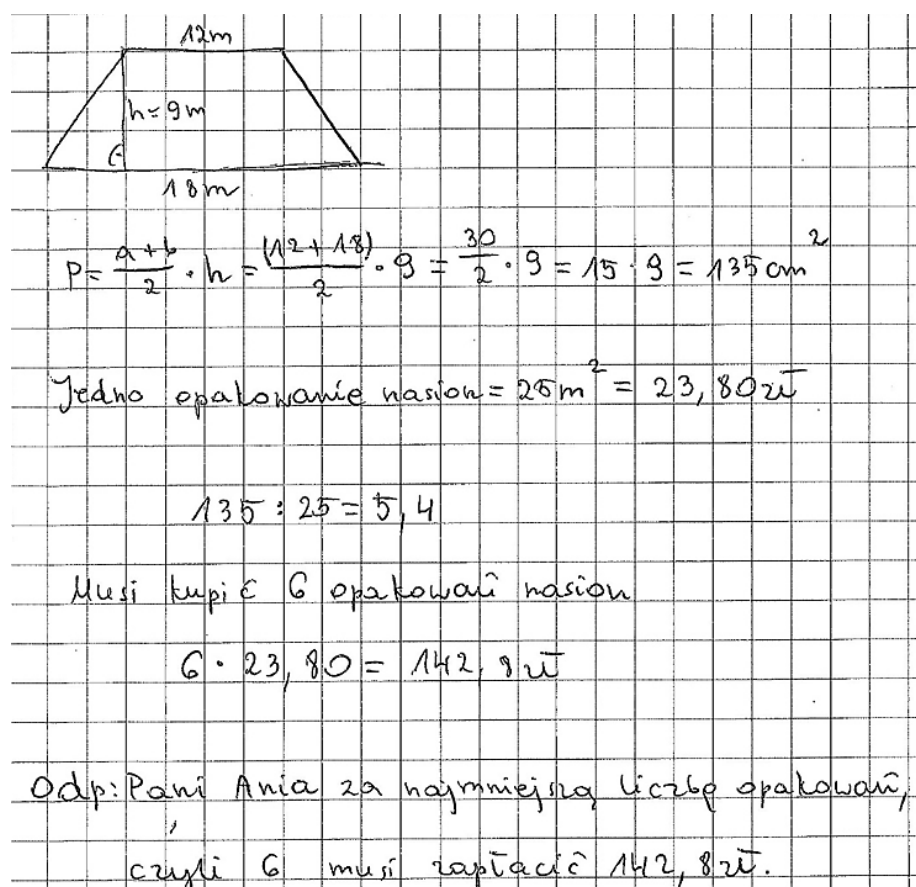


Diagram of a trapezoid with a top base of 12m, a bottom base of 18m, and a height of 9m.

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{12+18}{2} \cdot 9 = \frac{30}{2} \cdot 9 = 15 \cdot 9 = 135 \text{ m}^2$$

Jedno opakowanie nasion = $25 \text{ m}^2 = 23,80 \text{ zł}$

$$135 : 25 = 5,4$$

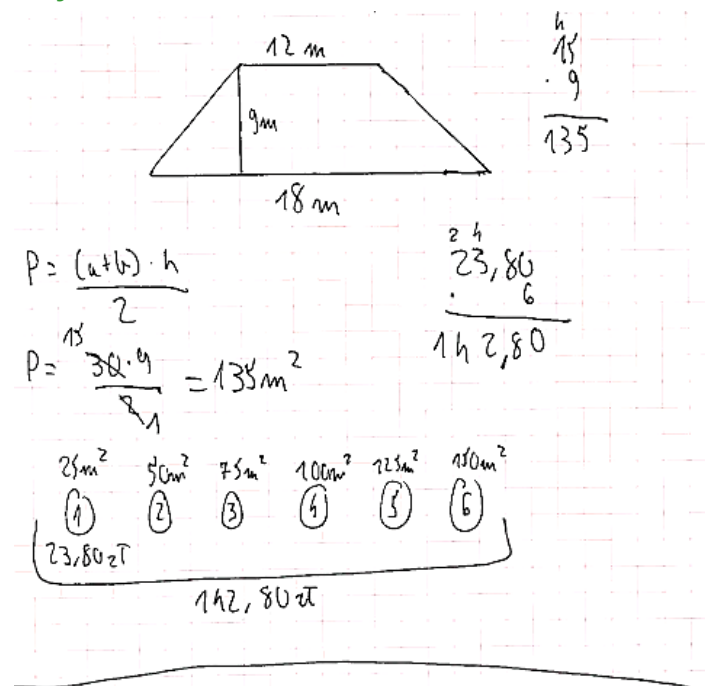
Musi kupić 6 opakowań nasion

$$6 \cdot 23,80 = 142,80 \text{ zł}$$

Odp: Pani Ania za najmniejszą liczbę opakowań,
,
czyli 6 musi zapłacić 142,80 zł.

W przykładach 71. i 72. ósmoklasiści ustalili najmniejszą liczbę potrzebnych opakowań, wypisując kolejne wielokrotności liczby 25. Zauważyli, że 5 opakowań wystarcza na obsianie 125 m^2 ogródka, natomiast powierzchnia, którą należy obsiać jest większa, więc potrzeba 6 opakowań.

Przykład 71.



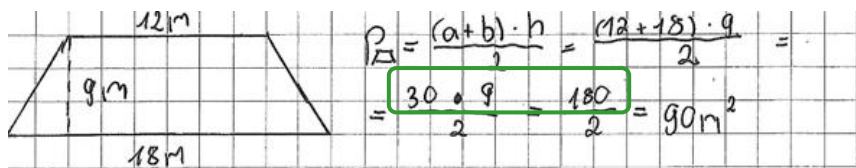
odp: Pani Anna musi zapłacić 142,80zł za 6 opakowań potrzebnych na obsianie całego ogrodu.

Przykład 72.



11% zdających uzyskało 2 punkty za to zadanie. Tak ocenione rozwiązania zostały zilustrowane w przykładach 73.–75.

Przykład 73.



błąd rachunkowy

Na obszarze całej powierzchni Pani Anna potrzebuje:

$$3 \cdot 25 = 75 \text{ m}^2 \quad 75 \text{ m}^2 < 90 \text{ m}^2$$

$$4 \cdot 25 = 100 \text{ m}^2 \quad 100 \text{ m}^2 > 90 \text{ m}^2$$

$$4 \cdot 23,80 = 80 + 12 + 3,6 = 95,60 \text{ zł}$$

błąd rachunkowy

Odp. Pani Anna za najmniejszą liczbę opakowań z nasionami potrzebnych na obszarze całej powierzchni ogrodu ~~pot~~ musi zapłacić 95,60 zł

Przykład 74.

Wzór na pole trapezu:

$$P = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$$

z powierzchni ogrodu pani Anny:

$$P = \frac{(18+12) \cdot 9}{2} = \frac{30 \cdot 9}{2} = 135 [\text{m}^2]$$

~~135~~

$$5 \cdot 25 < 135 < 6 \cdot 25$$

czyli pani Anna potrzebuje 6 opakowań

$$\begin{array}{r} 24 \\ 23,8 \\ \cdot 6 \\ \hline 142,8 \end{array}$$

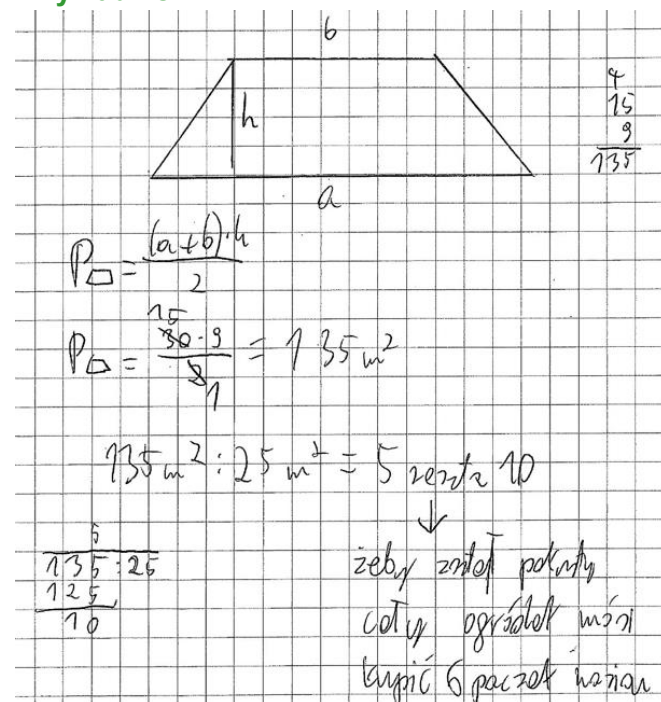
błąd rachunkowy

$$6 \cdot 23,80 \text{ zł} = 142,80 \text{ zł}$$

odp. pani Anna zapłaci 142,80 zł za najmniejszą liczbę opakowań z nasionami potrzebnymi na obszarze całego pola powierzchni jej ogrodu

W przykładzie 75. przedstawiono rozwiązanie, w którym zdający nie uzyskał maksymalnej liczby punktów, ponieważ nie doprowadził rozwiązania zadania do końca i nie obliczył kosztu zakupu potrzebnej liczby opakowań z nasionami.

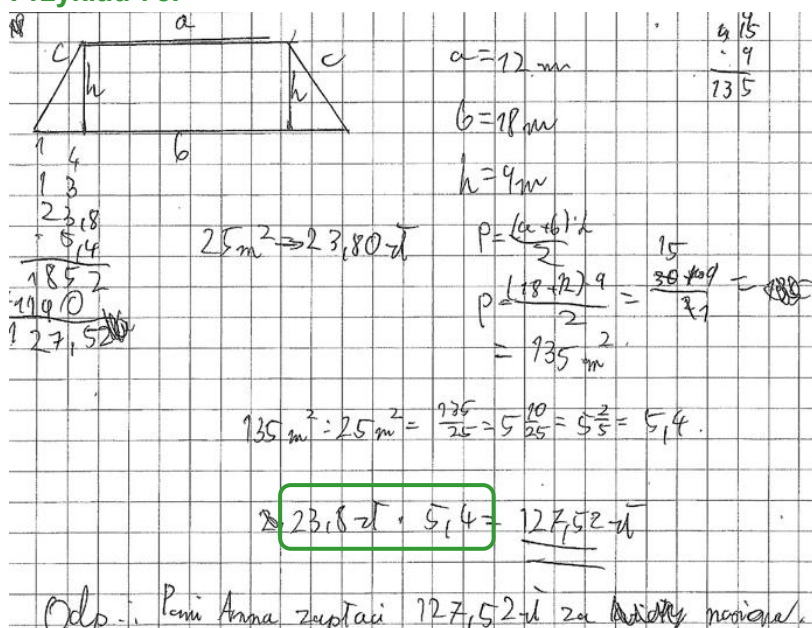
Przykład 75.



Przykłady 76.–79. są reprezentatywne dla rozwiązań ocenionych na 1 punkt. Taki wynik uzyskało 16% piszących egzamin.

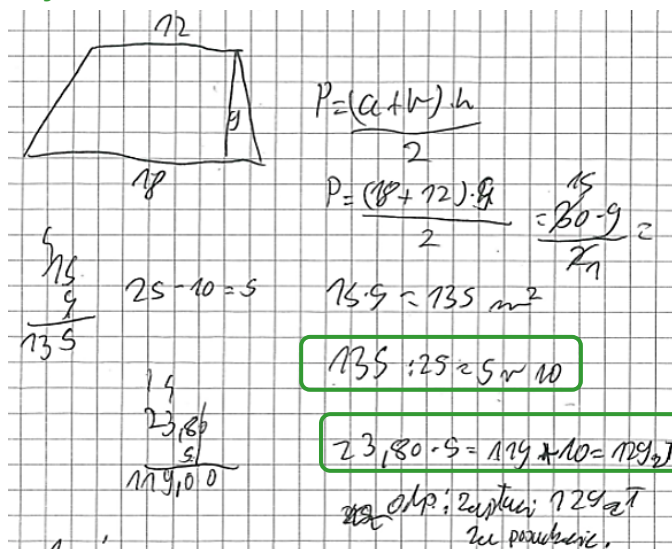
Uczeń mógł uzyskać 1 punkt, gdy zastosował poprawny sposób obliczenia pola powierzchni ogródka lub – przy zastosowaniu błędnego sposobu obliczenia pola – poprawnie oszacował najmniejszą liczbę opakowań z nasionami potrzebnych na obsianie całej powierzchni ogródka, o ile obliczone pole nie było wielokrotnością liczby 25. W przykładzie 76. pokazano rozwiązanie, w którym zdający poprawnie obliczył pole powierzchni ogródka. Natomiast przy obliczaniu najmniejszej liczby potrzebnych opakowań z nasionami otrzymał wynik, który jest ułamkiem liczby i nie uwzględnił, że nasiona można kupić wyłącznie w całych opakowaniach.

Przykład 76.



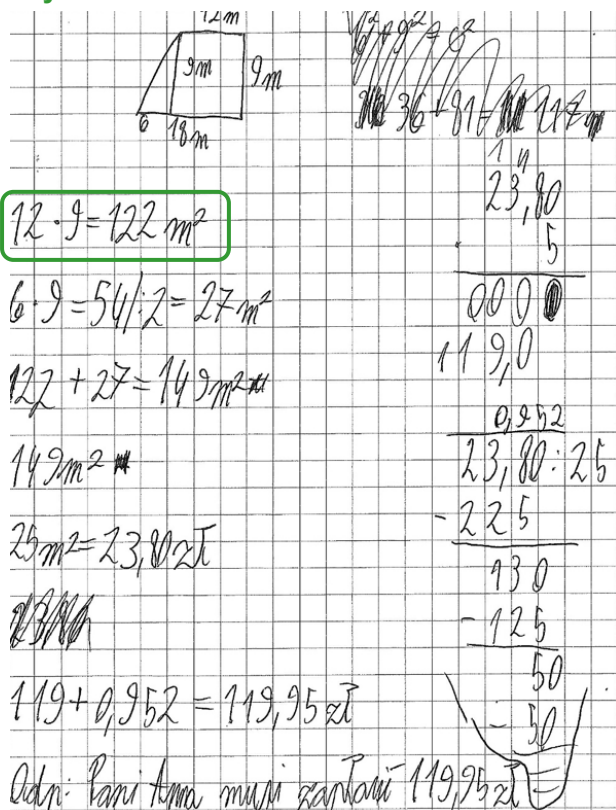
W przykładzie 77. zaprezentowano rozwiązanie, w którym uczeń poprawnie obliczył pole powierzchni ogródka. Jednak przy obliczaniu najmniejszej liczby potrzebnych opakowań z nasionami nie zinterpretował poprawnie reszty z dzielenia.

Przykład 77.



W przykładzie 78. pokazano rozwiązanie, w którym zdający popełnił błąd rachunkowy przy obliczaniu pola powierzchni ogródka. Nie poradził sobie z obliczeniem najmniejszej liczby potrzebnych opakowań z nasionami i w konsekwencji nie obliczył poprawnie kosztu ich zakupu.

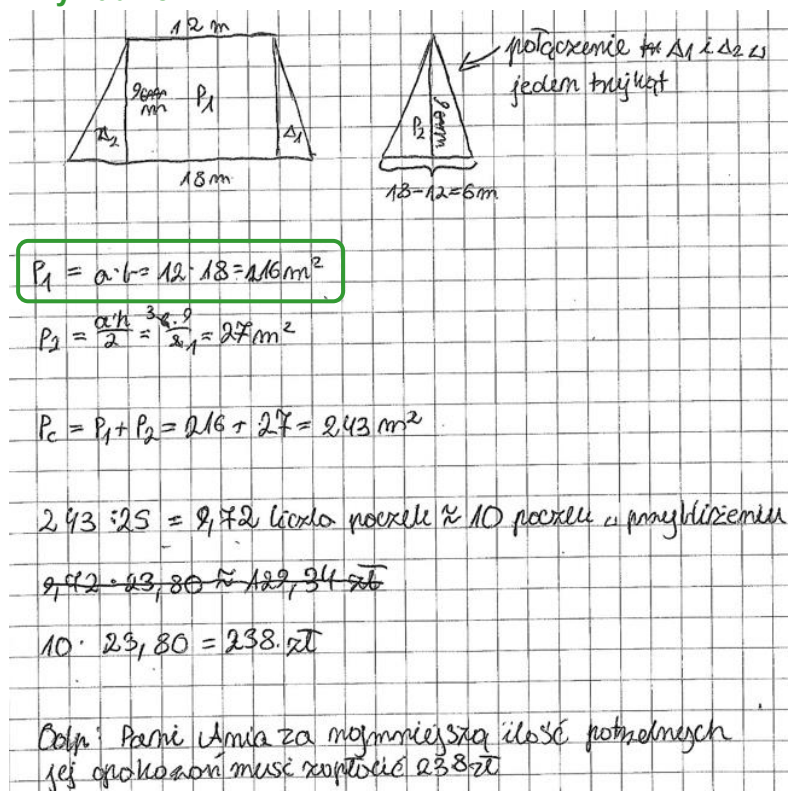
Przykład 78.



błąd rachunkowy

W przykładzie 79. zaprezentowano rozwiązanie, w którym zdający popełnił błąd przy obliczaniu pola powierzchni ogródka. Następnie konsekwentnie do otrzymanego wyniku, poprawnie ustalił najmniejszą liczbę potrzebnych opakowań z nasionami oraz obliczył koszt ich zakupu.

Przykład 79.



W rozwiązaniach ocenionych na 0 punktów zdający najczęściej nie potrafili poprawnie obliczyć pola trapezu, jak również ustalić właściwej liczby całych opakowań z nasionami.

Prawie 24% zdających nie poradziło sobie z rozwiązaniem tego zadania i otrzymało 0 punktów. W przykładach 80. i 81. zdający podzielili trapez na prostokąt i trójkąty, jednak przy obliczaniu pól trójkątów pominęli dzielenie przez 2.

Ponadto w przykładzie 80. zdający niepoprawnie obliczył koszt zakupu nasion, ponieważ przyjął jego wprost proporcjonalną zależność od powierzchni ogródka. Taki sposób zakłada możliwość zakupu dowolnej części opakowania i nie uwzględnia warunku, że należy kupić najmniejszą liczbę całych opakowań z nasionami.

Przykład 81. jest ilustracją rozwiązania, w którym uczeń niepotrzebnie zastosował twierdzenie Pitagorasa. Pozostałe obliczenia również nie doprowadziły do ustalenia właściwej liczby opakowań z nasionami ani kosztu ich zakupu.

Analiza rozwiązań zadania 19. wskazuje na trzy główne źródła trudności. Pierwszym było poprawne obliczenie pola trapezu. Drugim – właściwa interpretacja wyniku 5,4, oznaczającego konieczność zakupu 6 opakowań z nasionami. Trzecim źródłem trudności było bezbłędne wykonanie obliczeń. Błędy rachunkowe pojawiały się przede wszystkim w mnożeniu, dzieleniu oraz działaniach na liczbach dziesiętnych. W części prac pojawiały się także zbędne próby zastosowania twierdzenia Pitagorasa, mimo że długość ramienia trapezu nie była potrzebna do obliczenia jego pola. Wskazuje to na trudność w selekcji informacji oraz w wyborze narzędzi matematycznych potrzebnych do rozwiązania problemu. Uwidacznia również stosowane przez uczniów podejście, polegające na zastosowaniu znanego wzoru lub twierdzenia bez zastanowienia nad jego przydatnością w danej sytuacji.

Umiejętności z czwartego wymagania ogólnego – **rozumowanie i argumentacja** – sprawdzano jednym zadaniem zamkniętym (zadanie 6.) oraz dwoma zadaniami otwartymi (zadania 16. i 18.). Poziom wykonania tych zadań wyniósł – odpowiednio – 57%, 62% i 21%. Za rozwiązanie wszystkich zadań z tego obszaru wymagań zdający uzyskali średnio 47%.

Zadanie 6. – zadanie zamknięte wymagało od uczniów analizy doświadczenia losowego, polegającego na losowaniu 5 kul spośród zestawu 11 kul, a następnie uzupełnienia dwóch zdań. W pierwszym zdaniu należało wskazać, czy po losowaniu w pudełku pozostały kule ponumerowane liczbami parzystymi czy nieparzystymi. Drugie zdanie wymagało obliczenia sumy liczb na pięciu wylosowanych kulach.

Zadanie okazało się umiarkowanie trudne dla uczniów. Prawie 57% zdających poprawnie uzupełniło oba zdania.

W przykładach 82. i 83. pokazano poprawne rozwiązania zapisane w brudnopisie.

Przykład 82.

zad 6

11 kul – ponumerowanych 1-11 – muszą zostać same „np”!

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

6 – nieparzystych

5 – parzystych

nieparzysta + nieparzysta = parzysta

parzysta + parzysta = parzysta

nieparzysta + parzysta = nieparzysta

$2+4+6+8+10 = 10+10+10 = 30$

Przykład 83.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

$1+3=4$

$1+5=6$

$3+5=8$

$7+3=10$

$7+1=8$

$4+5=12$

$8+1=10$

$9+5=14$

$9+7=16$

$2+4+6+8+10 = 10+10+10 = 30$

Zadanie 16. – trzypunktowe, którego poziom wykonania wyniósł 62% – również okazało się dla ósmoklasistów umiarkowanie trudne. Rozwiązanie zadania wymagało zastosowania zależności między prędkością, drogą i czasem, wykonania obliczeń, a następnie wykorzystania uzyskanych wyników do sformułowania wniosku uzasadniającego postawioną w zadaniu tezę. Maksymalną liczbę punktów za bezbłędne rozwiązanie zadania otrzymało prawie 43% zdających.

Najczęściej ósmoklasiści obliczali prędkość, z jaką samochód jechał z Polanki do Jodłowa, a następnie formułowali wniosek, że przejechanie 75 km z tą samą prędkością trwałoby dłużej niż jedną godzinę. Drugą, równie często wybraną metodą było obliczenie drogi, jaką samochód przejechałby w ciągu jednej godziny, gdyby poruszał się ze stałą prędkością równą prędkości na trasie z Polanki do Jodłowa, a następnie sformułowanie poprawnego wniosku.

W przykładach 84.–87. zaprezentowano w pełni poprawne rozwiązania metodami opisanymi powyżej wraz z poprawnie sformułowaniem wnioskiem.

Przykład 84.

Prędkość = 72 km/h

48 km - 40 min
 : 4 (12 km 10 min) : 4
 6 (72 km 60 min) : 6

$V = \frac{s}{t}$

Czas drogi z Jodłowa do Dębina
 $75 \text{ km} : 72 \text{ km/h} \approx 1,04 \text{ h}$

Odp. Przejazd z Jodłowa do Dębiny będzie trwał dłużej niż godzinę, ponieważ jadąc z prędkością 72 km/h w ciągu godziny przejedziemy 72 km, a trasa z Jodłowa do Dębiny ma długość 75 km, przez co po upływie godziny do od Dębiny będą nas dzieliły jeszcze 3 km.

Polanka Jodłowa Dębina
 48 km 75 km

11 13
 - 123
 48
 75

droga
 prędkość czas

4
 1003
 75 : 72
 - 72
 300
 288
 220

Przykład 85.

Polanka $\xrightarrow{123\text{ km}}$ Dębina

Polanka $\xrightarrow{48\text{ km}}$ Jodłowa

40 min $\longrightarrow$ 48 km

20 min $\longrightarrow$ 24 km

1h $\longrightarrow$ 72 km

samochód z Polanki do Jodłowa jedzie z prędkością $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

$123 - 48 = 75 \text{ km}$ ← droga z Jodłowa do Dębiny

Jeżeli samochód jedzie z prędkością $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, to przejazd 75 km będzie trwał dłużej niż godzinę.

Przykład 86.

* - droga z Polanki do Dębiny - 123 km

S_1 - droga z Polanki do Jodłowa - 48 km - 40 min = $\frac{2}{3} \text{ h}$

S_2 - droga z Jodłowa do Dębiny - $123 - 48 = 75 \text{ (km)}$

$$V_1 = \frac{S_1}{t_1} = \frac{48 \text{ km}}{\frac{2}{3} \text{ h}} = 48 \text{ km} \cdot \frac{3}{2 \text{ h}} = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$V_1 = V_2 \quad \frac{S_2}{t_2} \quad t_2 = \frac{S_2}{V_2}$$

$$t = \frac{75 \text{ km}}{72 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 75 \text{ km} \cdot \frac{1 \text{ h}}{72 \text{ km}} = \frac{25 \text{ h}}{24} = 1 \frac{1}{24} \text{ h}$$

$$1 \frac{1}{24} \text{ h} > 1 \text{ h}$$

Odp.: Przejazd ten trwał dłużej bo trwał $1 \frac{1}{24} \text{ h}$

Przykład 87.

z Polanki do Dębiny = 123 km (przez Jodłową)

z Polanki do Jodłowa = 48 km - 40 min

z Jodłowa do Dębiny = ?

① Liczymy prędkość z Polanki do Jodłowa

$$\begin{array}{l} x:4 \downarrow 48 \text{ km} - 40 \text{ min} \downarrow :4 \\ \quad \downarrow 12 \text{ km} - 10 \text{ min} \downarrow :6 \\ \quad \downarrow 42 \text{ km} - 60 \text{ min} \downarrow :6 \\ \text{prędkość} = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}} \end{array}$$

② Liczymy trasę z J. do D.
 $123 \text{ km} - 48 \text{ km} = 75 \text{ km}$

③ Czas przejazdu z J. do D.

$$\begin{array}{l} 42 \text{ km} - 60 \text{ min} \\ 75 \text{ km} - x \end{array}$$

$$42x = 75 \cdot 60$$

$$42x = 4500$$

$$x = 62,5 \text{ min}$$

$$62,5 \text{ min} = 1 \text{ h } 2,5 \text{ min} \quad \leftarrow \text{ponad } 1 \text{ h}$$

minimalistyczny wniosek

19% wszystkich zdających za rozwiązanie zadania 16. uzyskało 2 punkty. Takie rozwiązania uczniowskie reprezentują przykłady od 88. do 90.

Przykład 88. jest ilustracją rozwiązania, w którym uczniowi do pełnego rozwiązania zabrakło poprawności rachunkowej – popełnił błąd podczas obliczania prędkości, z jaką samochód jechał z Polanki do Jodłowa.

Przykład 88.

$$p-j = s - 48 \text{ km} \quad t - 40 \text{ min}$$

$$v = \frac{48}{40} = 102 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

błąd rachunkowy,
błąd jednostki

$$j-d = s - 75 \text{ km} \quad v = 102 \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad t = \frac{75}{102} = 1 \frac{25}{102} \text{ h}$$

$$\text{odp.: } 1 \text{ h} < 1 \frac{25}{102} \text{ h}$$

odp.: Przejazd trwał dłużej niż 1h.

W przykładzie 89. przedstawiono rozwiązanie, w którym uczeń poprawnie obliczył prędkość samochodu z Polanki do Jodłowa oraz długość drogi z Jodłowa do Dębiny. Jednak we wniosku odniósł się do czasu przejazdu całej trasy, zamiast do czasu przejazdu odcinka z Jodłowa do Dębiny.

Przykład 89.

Diagram showing the route: POLANKA $\xrightarrow{48\text{ km}}$ JODŁOWO $\xrightarrow{72\text{ km}}$ DĘBINA

Calculations:

$$123\text{ km} - 48\text{ km} = 75\text{ km}$$

$$123\text{ km} : 1.5\text{ h} = 82\text{ km/h}$$

$$72\text{ km} : 1\text{ h} = 72\text{ km/h}$$

Wniosek: Samochód jedzie z prędkością 72 km/h a musi do pokonania 123 km, dlatego przejazd nie może trwać krócej niż godzinę.

wniosek nie dotyczy
postawionej w zadaniu tezy

W przykładzie 90. pokazano rozwiązanie, w którym uczeń w ostatnim etapie rozwiązania popełnił błąd rachunkowy i nie zapisał wniosku.

Przykład 90.

$s = 123\text{ km}$ - Polanka - Dębina
 $s = 48\text{ km}$ - Polanka - Jodłowo
 $t = 60\text{ min} = \frac{2}{3}\text{ h}$
 $v = \frac{s}{t}$
 $v = \frac{48\text{ km}}{\frac{2}{3}\text{ h}} = 72\text{ km/h}$

$s = 45\text{ km}$ - Jodłowo - Dębina
 $v = 72\text{ km/h}$
 $t = \frac{s}{v}$
 $t = \frac{45\text{ km}}{72\text{ km/h}} \approx 1,9\text{ h}$

błąd rachunkowy,
brak wniosku

Około 19% zdających otrzymało za rozwiązanie tego zadania 1 punkt. Ten punkt można było uzyskać przez spełnienie jednego z następujących kryteriów: poprawny sposób obliczenia prędkości, z jaką samochód przejechał z Polanki do Jodłowa lub poprawny sposób obliczenia drogi z Jodłowa do Dębiny, lub poprawny sposób obliczenia drogi przebytej przez samochód w określonym czasie z prędkością, z jaką samochód przejechał z Polanki do Jodłowa z wykorzystaniem własności wielkości wprost proporcjonalnych, lub poprawny sposób obliczenia czasu przejazdu samochodu z Polanki do Dębiny.

Przykłady 91.–93. są reprezentatywne dla metod rozwiązywania ocenionych zgodnie z opisanymi kryteriami.

Przykład 91.

$$v = \frac{48 \text{ km}}{\frac{2}{3} \text{ h}} = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

poprawny sposób obliczenia prędkości, z jaką samochód przejechał z Polanki do Jodłowa

$$v = \frac{s}{t} \quad t = \frac{s}{v}$$

$$t = \frac{123 \text{ km}}{72 \frac{\text{km}}{\text{h}}}$$

poprawny sposób obliczenia czasu przejazdu samochodu z Polanki do Dębiny

$$\frac{123}{72} \text{ h} > 1 \text{ h}$$

Przykład 92.

$$\begin{array}{ccc} P \rightarrow J & P \rightarrow J & J \rightarrow D \\ 123 \text{ km} & 48 \text{ km} & v = \frac{75}{40} \\ 123 - 48 = 75 \text{ (km)} & & v = \frac{s}{t} \\ 123 - 48 = 75 \text{ (km)} & & v = \frac{48}{40} = 12 \frac{\text{km}}{\text{h}} \end{array}$$

poprawny sposób obliczenia drogi z Jodłowa do Dębiny

$$v = \frac{48}{40}$$

$$v =$$

Przykład 93.

$$\begin{array}{l} 48 \text{ km} - 40 \text{ minut} \\ 40 \text{ minut} = \frac{2}{3} \text{ godz.} \\ 12 \text{ km} - 10 \text{ minut} \\ 72 \text{ km} - 60 \text{ minut} - 1 \text{ godz.} \end{array}$$

poprawny sposób obliczenia drogi przebytej przez samochód w ciągu 1 godziny

Dalr: Jeżeli samochód będzie jechał ~~razem~~ tą samą prędkością to nie jest możliwe przejechanie 123 km w ~~razem~~ mniej niż godzinie i minucie, przejechanie 123 km już trwa 1 godzinę, 72

Ponad 19% zdających otrzymało 0 punktów za to zadanie, ponieważ nie podjęło próby rozwiązania lub niepoprawnie zinterpretowało jego treść.

W przykładzie 94. przedstawiono rozwiązanie, w którym uczeń błędnie zinterpretował dane dotyczące długości obu odcinków drogi, podwoił długość pierwszego odcinka i obliczył czas przejazdu dla 96 km. W rezultacie obliczenia czasu nie dotyczą drogi wskazanej w poleceniu.

Przykład 94.

~~z Polanki do Jodłowa~~ cała droga - 123 km
~~z Jodłowa do Dębiny~~ z P do J - 48 km
 48 km - 40 min.

$48 \text{ km} = 40 \text{ min} / 2$

96 = 80 min = 1,2 h
~~120 min~~

Odp. Przejazd trwał trochę niż godzinę ponieważ

Odp. Przejazd zajmuje więcej niż godzinę ponieważ droga zajmuje więcej niż 2 razy drogę z Polanki do Jodłowa.

błędna interpretacja długości drogi z Jodłowa do Dębiny

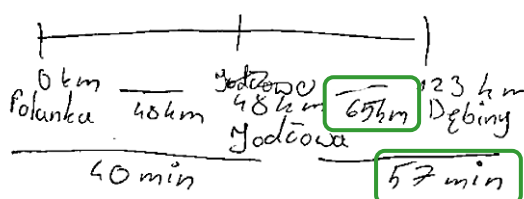
Przykład 95. jest ilustracją rozwiązanie, w którym uczeń poprawnie zinterpretował treść zadania i przyjął właściwą strategię rozwiązania, ale nie przedstawił sposobu obliczenia długości drogi z Jodłowa do Dębiny oraz niepoprawnie wyznaczył czas przejazdu tego odcinka.

Przykład 95.

z Polanki do Dębiny przez Jodłowo - 123 km
 z Polanki do Jodłowa - 48 km - samochód przejechał w czasie 40 minut
 z Jodłowa do Dębiny - z taką samą prędkością co zajął drogę z Polanki do Jodłowa

v - prędkość
 t - czas

$t = 40 \text{ min}$ 60 min - 1 godz
 $v = \text{prędkość} = ?$



brak sposobu obliczenia długości drogi z Jodłowa do Dębiny

niepoprawne wyznaczenie czasu przejazdu drugiego odcinka drogi

W zadaniu 16. trudność stanowiło przede wszystkim właściwe zinterpretowanie danych zawartych w treści oraz ich wykorzystanie w obliczeniach. Uczniowie często popełniali błędy już na etapie ustalania długości poszczególnych odcinków drogi. Pojawiały się również błędy rachunkowe. Część zdających, mimo prawidłowego toku rozumowania, nie formułowała poprawnego wniosku lub zapisywała wniosek niezgodny z wykonanymi obliczeniami.

Zadanie 18. okazało się najtrudniejszym zadaniem sprawdzającym umiejętności z czwartego obszaru wymagań i najtrudniejszym zadaniem w całym arkuszu. Poziom wykonania tego zadania jest równy 21%.

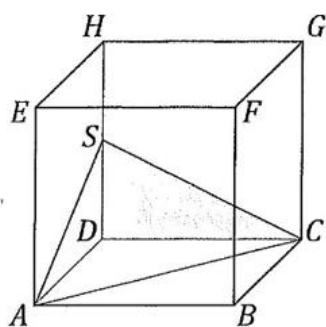
Prawidłowe rozwiązanie zadania wymagało od zdających zapisania poprawnego wyrażenia algebraicznego jednej zmiennej, opisującego objętość ostrosłupa $ACDS$ w zależności od długości a krawędzi sześcianu, a następnie wykonania przekształceń algebraicznych prowadzących do ustalenia, ile razy objętość danego ostrosłupa jest mniejsza od objętości sześcianu.

Ósmoklasiści musieli zauważyć, że pole podstawy ostrosłupa stanowi połowę pola podstawy sześcianu oraz to, że wysokość ostrosłupa stanowi połowę wysokości sześcianu. Następnie, korzystając z tych zależności oraz ze znajomości wzorów na objętość sześcianu i ostrosłupa, zapisać wyrażenie algebraiczne jednej zmiennej i obliczyć iloraz objętości obu brył.

Najczęściej wybieranym przez zdających sposobem rozwiązania było zapisanie objętości ostrosłupa $ACDS$, przyjmując za jego podstawę trójkąt ACD , stanowiący połowę kwadratu, oraz przyjmując wysokość ostrosłupa równą połowie długości krawędzi sześcianu.

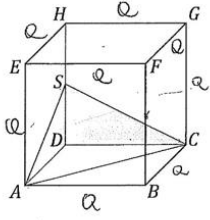
W przykładach od 96. do 98. zaprezentowano pełne rozwiązania wykonane tą metodą. Maksymalną liczbę 2 punktów za rozwiązanie tego zadania uzyskało przeszło 16% zdających.

Przykład 96.



$$\begin{aligned}
 V &= P_p \cdot H \\
 V_{ABCDEFGH} &= a^2 \cdot a = a^3 \\
 V &= \frac{1}{3} P_p \cdot H & P_p &= \frac{a \cdot a}{2} = \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2} a^2 \\
 V_{ACDS} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{1}{2} a = \frac{1}{6} a^2 \cdot \frac{1}{2} a = \frac{1}{12} a^3 \\
 V_{ACDS} &= \frac{1}{12} a^3 & V_{ABCDEFGH} &= a^3 \\
 \text{Odp.: Objętość ostrosłupa } ACDS \text{ jest } & 12 \text{ razy mniejsza od objętości grani-} \\
 & \text{niostrosłupa } ABCDEFGH.
 \end{aligned}$$

Przykład 97.



① objętość ~~nie~~ sześcianu
 $ABCDEF GH$:
 $V = a^3$

② Pole podstawy ostr. $ACDS$:
 $P_p = \frac{a \cdot a}{2} = \frac{a^2}{2}$
 $|SD| = \frac{a}{2}$

③ Obj. ostr. $ACDS$
 $V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$
 $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{2}$
 $V = \frac{1 \cdot a^2 \cdot a}{3 \cdot 2 \cdot 2}$
 $V = \frac{a^3}{12}$

odp. objętość sześcianu $ABCDEF GH$ jest 12 razy większa od objętości ostrosłupa $ACDS$

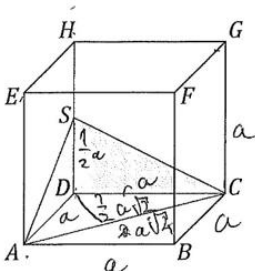
④ $\frac{a^3}{12} \cdot 12 = a^3$

odp. objętość ostrosłupa $ACDS$ jest 12 razy mniejsza od objętości sześcianu $ABCDEF GH$

wzór na obj. sześcianu:
 $V = a^3 = a^2 \cdot a$
 wzór na obj. ost.:
 $V = \frac{1}{3} \cdot a \cdot H$

Przykład 98. jest ilustracją rozwiązania, w którym zdający przyjął odcinek AC za podstawę trójkąta ACD . Do wyznaczenia długości tego odcinka wykorzystał wzór na przekątną kwadratu.

Przykład 98.



$V_{\square} \rightarrow P_p \cdot H = a \cdot a \cdot a = a^3$

~~objętość~~

$a = a$

$|AC| = a\sqrt{2}$

$|DC| = |DA| = a$

$H = |SD| = \frac{1}{2}a$

$P_{pA} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a = \frac{a^2}{2}$

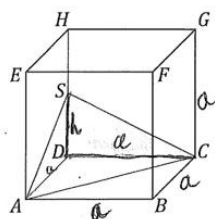
$P_{pD} = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{4}a^2\sqrt{2}$

$V_A = \frac{1}{3} P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{12}a^3$

Odp.: Objętość ostrosłupa jest 12 razy mniejsza od objętości sześcianu.

Inny sposób rozwiązania przedstawiono w przykładzie 99., w którym zdający jako podstawę ostrosłupa przyjął trójkąt ADS .

Przykład 99.



$$h = \frac{1}{2}a$$

$$V_{\text{ABCDEFHG}} = a^3$$

~~$$V_{\text{ACDS}} = \frac{1}{3} \cdot P_{\text{ADS}} \cdot a$$~~

$$P_{\text{ADS}} = \frac{h \cdot a}{2} = \frac{\frac{1}{2}a \cdot a}{2} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{4}a^2$$

$$V_{\text{ACDS}} = \frac{1}{3} \cdot P_{\text{ADS}} \cdot a = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}a^2 \cdot a = \frac{1}{12}a^2 \cdot a = \frac{1}{12}a^3$$

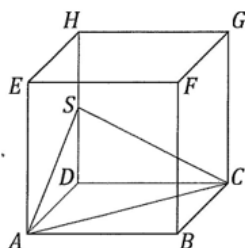
$$\frac{V_{\text{ABCDEFHG}}}{V_{\text{ACDS}}} = \frac{a^3}{\frac{1}{12}a^3} = a^3 \cdot 12 \cdot \frac{1}{a^3} = 12$$

= 12 razy większa objętość
→ 12 razy mniejszy ostrosłup

Odp. Objętość ostrosłupa ACDS
jest 12 razy mniejsza niż objętość sześcianu

Prawie 9 % zdających za rozwiązanie zadania uzyskało 1 punkt. Do uzyskania pełnej liczby punktów często brakowało poprawności rachunkowej. Trudności dotyczyły przede wszystkim mnożenia i dzielenia ułamków zwykłych, co ilustrują przykłady 100. oraz 101.

Przykład 100.



$$V_{\text{sześcianu}} = a^3$$

$$P_{\text{ostrosłupa (DAC)}} = \frac{a \cdot a}{2} = \frac{a^2}{2}$$

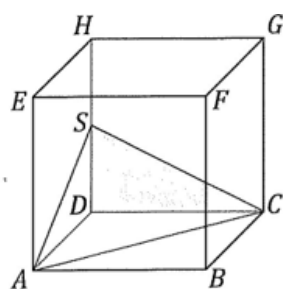
$$H = \frac{1}{2}a$$

$$V_{\text{ostrosłupa}} = \frac{1}{3} P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{3}a^3$$

$$V_{\text{sześcianu}} : V_{\text{ostrosłupa}} = 1 : \frac{1}{3} = 1 : \frac{1}{3} = 1 \cdot \frac{3}{1} = 3$$

Odp. Objętość ostrosłupa ACDS jest 3 razy mniejsza od objętości sześcianu ABCDEFGH

Przykład 101.



$$\square \approx 1$$

$$\Delta \approx 2$$

$$V_1 = P_1 \cdot H_1 = a^3$$

$$V_2 = \frac{1}{2} P_2 \cdot H_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{1}{2} a = \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{1}{2} a = \frac{1}{6} a^3$$

$$a^3 : 6 = \frac{1}{6} a^3$$

$$P_1 = a^2$$

$$H_1 = a$$

$$P_2 = \frac{a \cdot h}{2}$$

$$P_2 = \frac{a \cdot a}{2} / : 2$$

$$2P_2 = a^2 / : 2$$

$$P_2 = \frac{1}{2} a^2$$

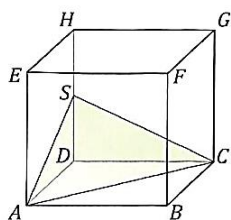
$$H_2 = \frac{1}{2} a$$

Adp.: ~~Objętość~~ Objętość ostrosłupa ACDS jest
70 razy mniejsza od objętości sześcianu
ABCDEFGH.

Przyczyną nieuzyskania maksymalnej liczby punktów były również błędne przekształcenia wyrażeń algebraicznych oraz niepoprawna interpretacja otrzymanego wyniku albo brak interpretacji, co ilustrują przykłady 102.–105.

W przykładzie 102. przedstawiono rozwiązanie, w którym zdający zbudował poprawny model algebraiczny, jednak błędnie zinterpretował wynik. Ten przykład pokazuje, że poprawne wykonanie przekształceń nie jest wystarczające do uzyskania pełnej liczby punktów, jeśli otrzymany wynik nie zostanie właściwie odniesiony do pytania postawionego w zadaniu.

Przykład 102.



Objętość sześcianu $= a^3$, bo $V = a \cdot a \cdot a$
(w sześcianie)

Podstawa ostrosłupa to $\triangle ADC$
Pp ostrosłupa $=$ pole trójkąta $\frac{DC \cdot AD}{2}$
 $\frac{a \cdot a}{2} = \frac{a^2}{2}$

Objętość ostrosłupa $= \frac{1}{3} Pp \cdot h$

$h =$ ~~a~~ $\frac{a}{2}$

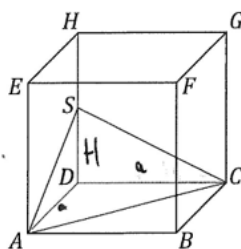
$$V_{\text{ostrosłupa}} = \frac{1}{3} \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{6} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{12}$$

Odp. Objętość ostrosłupa A-DCS jest o 12 niżej niż

objętość sześcianu ABCDEFGH.

błędna interpretacja wyniku

Przykład 103.



$$DS = \frac{1}{2}a$$

przekątna przekątnej
cięcia po wzdłuż
człony

$$AC = a\sqrt{2}$$

$$V_{\Delta} = \frac{1}{3} \cdot Pp \cdot H \quad H = \frac{1}{2}a$$

$$V_{\square} = a^3$$

$$V_{\Delta} = \frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{1}{2} (a \cdot a^2) \cdot \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{1}{2} a^3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} a^3$$

$$Pp = \frac{1}{2} a^2$$

$$\triangle ADC = \triangle ABC$$

$$V_{\square} = a^3$$

$$ABCD = a^2$$

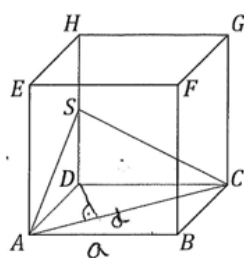
$$\triangle ADC = \frac{1}{2} \cdot a^2$$

Odp. Objętość ostrosłupa jest

połowa objętości sześcianu ABCDEFGH.

niepoprawne przekształcenie
wyrażenia algebraicznego

Przykład 104.



$$V_{\text{szescianu}} = a^3$$

$$V_{\text{ostroslupa}} = \frac{1}{3} P_p \cdot H = \frac{1}{3} a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} a$$

$$P_{\text{ostroslupa}} = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} a\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \left(\frac{a\sqrt{2}}{1} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \right) : 2 = \frac{8a\sqrt{2}}{2} : 2 =$$

$$= a\sqrt{2} : 2 = \frac{1}{2} a\sqrt{2}$$

Obj.: długość ostrosłupa ACDS jest o $a\sqrt{2}$ razy mniejsza od objętości sześcianu ABCDEFGH.

$$V_{\text{sześcianu}} = a^3$$

$$V_{\text{ostrosłupa}} = \frac{1}{3} P_p \cdot H = \frac{a\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{2} \cdot a}{12}$$

$$P_{\text{ostrosłupa}} = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} a\sqrt{2}}{2} = \frac{2a\sqrt{2}}{2} : 2 = a\sqrt{2} : 2 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{6}$$

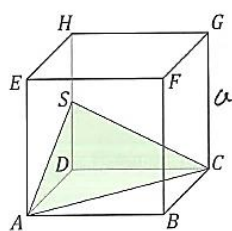
$$a^3 : \frac{a\sqrt{2} \cdot a}{12} = \frac{a^3}{1} \cdot \frac{12}{a\sqrt{2} \cdot a} = \frac{12a}{\sqrt{2}} = \frac{12a \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{12a\sqrt{2}}{2} = 6a\sqrt{2}$$

$$\frac{12a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{12a \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{12a\sqrt{2}}{2} = 6a\sqrt{2}$$

niepoprawne przekształcenie wyrażenia algebraicznego oraz błąd rachunkowy

W przykładzie 105. zaprezentowano rozwiązanie, w którym zabrakło porównania ilorazowego objętości ostrosłupa i sześcianu.

Przykład 105.



$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$$

$$V = a^3$$

$$h = \frac{1}{2} a$$

$$a^2 : 2 = \frac{1}{2} a^2$$

$$V_{\text{ostrosłupa}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{1}{2} a$$

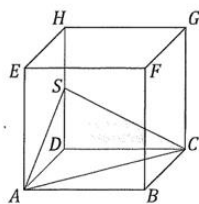
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} a^3 =$$

$$= \frac{1}{12} a^3$$

Prawie 75% ósmoklasistów otrzymało za zadanie 0 punktów. Część zdających nie podjęła rozwiązania albo błędnie zinterpretowała treść zadania. Niektórzy zastosowali niepoprawny wzór na objętość ostrosłupa (przykłady 106. i 107.). Inni nie uwzględnili zależności między wysokością trójkąta stanowiącego podstawę ostrosłupa a długością krawędzi sześcienu lub zapisali błędną zależność (przykłady 108. i 109.). Wśród rozwiązań znalazły się również takie, które opierały się wyłącznie na podstawieniu konkretnych liczb, bez przedstawienia zależności algebraicznych (przykład 110.).

Przykład 106.



$$Q = dT_{\text{gost}} \text{ bolun}$$

$$\frac{1}{2} a = \text{wysokość ostrości ACDS}$$

$$V = \underline{a}^3$$

$$V_{\text{ACDS}} = P_p \cdot H = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{4} \quad \frac{a^3}{4} \cdot 4 = a^3$$

$$\frac{a^3}{4} \cdot 4 = a^3$$

pominięcie współczynnika $\frac{1}{3}$
we wzorze na objętość ostrosłupa

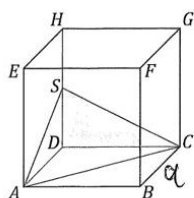
$H = \frac{1}{2}a$



$$H = \frac{1}{2} a$$

$$P_{PAEDS} = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a \cdot \frac{a}{2}}{2} = \frac{a \cdot a}{2} = \frac{a^2}{2}$$

Objętość ośrodkowa ACDS jest 4 razy mniejsza od objętości szkieletu ABCDEFGH.



$$AC = a\sqrt{2}$$

$$SD = 0,5a$$

$$V = \frac{1}{2} P_p \cdot H$$

$$\cancel{P_A} A' \quad P_{ADC} = \frac{\alpha \cdot h}{2}$$

$$P_{\text{DADC}} = \frac{a \cdot a}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot 0,5a$$

błędna wartość współczynnika we wzorze na objętość ostrosłupa

$$W = A$$

$$V_{ABCDEFGH} = a^3$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ 600 \overline{) 25} \\ 56 \\ \hline 100 \end{array}$$

$$V = \frac{a^3}{24}$$

$$V = a^3 = 24$$

$$V = \frac{a^3}{7}$$

Od p: Obiektowa
ostrzaupa
ACMS jest
2 li razy
mniejsza
od szóstym
ABCDEF GH

$$\frac{u}{V} = 1 \cdot \frac{a \cdot a}{\gamma} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot a$$

$$2 \quad 2 \quad 2$$

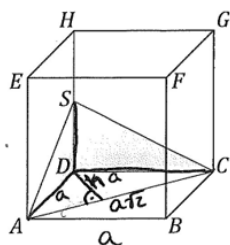
$$a-a, \frac{1}{a}$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 2$$

$$V = \frac{0,2}{24 \times 6}$$

W przykładzie 108. uczeń jako podstawę trójkąta ACD przyjął odcinek $AC = a\sqrt{2}$, zatem powinien zapisać wysokość h tego trójkąta jako $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$.

Przykład 108.



$$V_{\text{sześcianu}} = P_p \cdot H$$

$$P_{\text{sześcianu}} = a^2$$

$$H = a$$

$$V_{\text{sześcianu}} = a^2 \cdot a = a^3$$

V_0 = objętość ostrosłupa

$$V_0 = \frac{1}{3} P_p \cdot H \quad P_{p0} = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a \cdot \frac{1}{2}a}{2} \quad H = \frac{1}{2}a$$

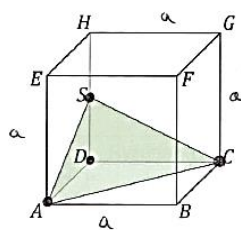
$$P_{p0} = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a \cdot \frac{1}{2}a}{2} = \frac{a^2}{4}$$

$$V_0 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{1}{2}a = \frac{a^3}{24}$$

$$V_0 = \frac{a^2 \cdot h}{6} = \frac{a^2 \cdot \frac{1}{2}a}{6} = \frac{a^3}{12}$$

zapis nie uwzględnia zależności wysokości h podstawy ostrosłupa od długości a krawędzi sześcianu

Przykład 109.



$$V_{\text{c}} = a^3$$

$$V_{\Delta} = \frac{1}{3} P_{\Delta} \cdot H$$

$$P_{\Delta} = \frac{a \cdot \frac{1}{2}a}{2}$$

$$H_{\Delta} = \frac{1}{2}a$$

błędne ustalenie wysokości ostrosłupa do wybranej podstawy

$$V_{\Delta} = \frac{a^3}{24}$$

$$V_{\Delta} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a \cdot \frac{1}{2}a}{2} \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{1}{2}a^2}{2} \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{1}{2}a$$

$$= \frac{\frac{1}{6}a^2}{2} \cdot \frac{1}{2}a = \frac{\frac{1}{12}a^3}{2} = \frac{1}{24}a^3$$

Odp: Objętość ostrosłupa $ACDS$ jest o $\frac{1}{24}$ mniejsza od objętości sześcianu $ABCDEFGH$

Duża grupa zdających podejmowała próbę rozwiązania zadania, operując wyłącznie na konkretnych wartościach liczbowych, zamiast przeprowadzić rozumowanie ogólne, z wykorzystaniem dowolnej długości krawędzi sześcianu, którą oznaczono a .

Przykład 110. pokazuje, że zdający prawidłowo zrozumiał zależności geometryczne i otrzymał właściwy wynik, jednak ograniczył rozwiązanie do pojedynczego przykładu liczbowego. Przyjęcie jednej, konkretnej długości krawędzi pozwalało jedynie sprawdzić badaną zależność dla wybranego sześcianu, ale nie stanowiło podstawy do pokazania, że jest ona prawdziwa dla dowolnej długości krawędzi sześcianu.

Przykład 110.

Handwritten calculations on grid paper:

$a = 10$
 $SD = 5$
 $DC = 10$
 $DA = 10$
 $Obj_{\square} = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$
 $P_{\square} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 = 50$
 $Obj_{\triangle} = \frac{1}{3} \cdot P_{\square} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 50 \cdot 5 = \frac{250}{3}$

obliczenie wyłącznie dla $a = 6$

$a = 6$
 $Obj_{\square} = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$
 $DC = 6$
 $AD = 6$
 $SD = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$
 $Obj_{\square} = \frac{1}{3} P_{\square} \cdot h$
 $P_{\square} = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18$
 $Obj_{\triangle} = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 3 = 18$
 $\frac{216}{18} = 12$
 $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$
 $Obj_{\triangle} = 18$

Odp: Objętość ostrosłupa jest mniejsza o 12 razy

W zadaniu 18. wielu ósmoklasistów miało trudności z operowaniem dowolną długością krawędzi sześcianu oznaczoną a oraz wykonywaniem przekształceń algebraicznych.

Ponadto częstym błędem było pomijanie ułamka $\frac{1}{3}$ we wzorze na objętość ostrosłupa lub – w przypadku obliczania pola podstawy ostrosłupa jako pola trójkąta – pomijanie ułamka $\frac{1}{2}$ we wzorze na pole trójkąta. Pominięcie któregośkolwiek z tych współczynników prowadziło do błędnego wyniku.

Trudność nie wynikała jednak wyłącznie z nieznamomości lub niewłaściwego zastosowania wzorów. Zdający mieli również problemy z doбором wysokości ostrosłupa do wybranego trójkąta pełniącego funkcję podstawy ostrosłupa oraz rozpoznaniem zależności między długościami odcinków wewnątrz sześcianu.

Wnioski i rekomendacje

1. Podsumowanie ogólne.

Analiza wyników egzaminu ósmoklasisty z matematyki w 2026 r. pokazuje, że dla zdających arkusz okazał się umiarkowanie trudny. Uczniowie znacznie lepiej radzą sobie z zadaniami o przewidywalnej strukturze, opartymi na znanych schematach, jednak napotykają istotne trudności w sytuacjach wymagających samodzielnego planowania strategii, myślenia abstrakcyjnego oraz łączenia wiedzy z różnych działów matematyki.

2. Obszary, w których uzyskano najlepsze wyniki.

Tegoroczni ósmoklasiści najlepiej poradzili sobie z zadaniami sprawdzającymi pierwsze wymaganie ogólne – sprawność rachunkową – oraz stosowanie dobrze znanych, nieskomplikowanych reguł. Najwyższy poziom wykonania uzyskano w zadaniu 4., które wymagało mnożenia potęg o tych samych podstawach i wykładnikach całkowitych dodatnich. Zdający dobrze poradzili sobie również z zadaniem 11., dotyczącym obliczania miar kątów z wykorzystaniem własności kątów i wielokątów oraz rozwiązaniem równania. Łatwe okazały się także zadania obejmujące interpretowanie danych i obliczenia procentowe (zadania 1., 5.) oraz obliczenie średniej arytmetycznej (zadanie 9.).

3. Obszary wymagające dalszego doskonalenia.

Największych trudności przysporzyły uczniom zadania otwarte, wymagające samodzielnego zaplanowania strategii rozwiązania, łączenia wiadomości z różnych działów matematyki oraz rozumowania algebraicznego i geometrycznego. Szczególnie wyraźnie widać to w zadaniu 18., którego poziom wykonania wyniósł 21%. Zadanie weryfikowało umiejętność myślenia abstrakcyjnego, rozumowania i poprawnego wnioskowania. Wymagało połączenia geometrii przestrzennej z zapisem zależności za pomocą wyrażeń algebraicznych.

Rozwiązania wykonywane wyłącznie dla jednej konkretnej wartości długości krawędzi sześciianu nie realizowały istoty zadania, ponieważ nie potwierdzały umiejętności posługiwania się zapisem algebraicznym podczas wyznaczania objętości obu brył i nie pokazywały wartości ilorazu objętości tych brył dla dowolnej długości krawędzi sześciianu. Wskazuje to na potrzebę rozwijania umiejętności uogólniania zależności geometrycznych, wykonywania obliczeń i zapisywania rozumowania z użyciem oznaczeń literowych.

Poprawne rozwiązania pokazują jednocześnie, że zadanie można było rozwiązać na kilka sposobów, wybierając jako podstawę ostrosłupa różne trójkąty. Jest to cenna wskazówka dydaktyczna: w geometrii przestrzennej należy rozwijać elastyczność w postrzeganiu bryły i dostrzeganiu różnych możliwości rozwiązania.

Trudne okazało się również zadanie 20., wymagające połączenia własności równoległoboku, zastosowania twierdzenia Pitagorasa lub skorzystania z własności przekątnej kwadratu oraz działań na pierwiastkach.

Do rozwiązania tego zadania potrzebne były: wyobrażenia – w tym umiejętność przewidywania oraz umiejętności analityczne, jak precyzyjne dopasować boki trójkąta

i trapezu; np. boki o równej długości, aby następnie złożyć z nich zadany równoległobok i finalnie obliczyć jego obwód.

Analiza wyników wskazuje na trudności uczniów z poprawnym przekształcaniem wyrażeń algebraicznych (zadanie 8.) i obliczaniem długości odcinka w układzie współrzędnych (zadanie 12.).

4. Zidentyfikowane trudności.

Uczniowie często napotykali trudności w przechodzeniu od tekstu lub tabeli do uporządkowanych danych, od rysunku do wzoru, od sytuacji praktycznej do wyrażenia algebraicznego oraz od wyniku liczbowego do jego interpretacji w kontekście zadania. Wynika z tego, że zdający nie zawsze postrzegają tabelę, rysunek, zapis algebraiczny i opis słowny jako różne sposoby przedstawienia tej samej sytuacji matematycznej.

W wielu pracach poprawny sposób rozwiązania nie prowadził do oczekiwanego wyniku z powodu błędów rachunkowych. Sprawność rachunkowa powinna być traktowana jako codziennie wykorzystywane narzędzie, niezbędne do prowadzenia bardziej złożonego rozumowania. Niejednokrotnie uzyskanie maksymalnej liczby punktów zarówno za zadania zamknięte, jak i otwarte uniemożliwiały błędy rachunkowe.

W części rozwiązań zabrakło refleksji nad sensownością otrzymanego wyniku w kontekście treści zadania. Przykładem może być wynik 58,5 w zadaniu 15., który nie skłonił zdającego do ponownego przeanalizowania obliczeń, mimo że liczba kartek powinna być liczbą całkowitą dodatnią. Innym przykładem (zadanie 19.) było potraktowanie liczby 5,4 jako liczby kupowanych opakowań z nasionami. Kontrola rozwiązania nie może więc ograniczać się do ponownego wykonania rachunku. Powinna obejmować zastanowienie nad realnością uzyskanego wyniku.

Duża grupa zdających pokonywała zasadniczy etap rozwiązania, ale nie wykonywała ostatniej wymaganej czynności. Przykładowo, w zadaniu dotyczącym kątów wewnętrznych wielokąta zdający prawidłowo obliczali miarę kąta, jednak nie zwiększali jej o 70° , czego wymagało polecenie. Podobna sytuacja występowała w zadaniach otwartych, gdy uczeń kończył rozwiązanie na wyniku pośrednim, np. po ustaleniu liczby opakowań nie obliczał kosztu ich zakupu, nie formułował wniosku w zadaniu wymagającym uzasadnienia, nie podawał jednostki lub nie wracał do pytania zawartego w treści zadania. Wskazuje to na potrzebę kształtowania nawyku uważnego czytania treści zadania i stosowania się do polecenia, nie tylko wykonywania kolejnych obliczeń.

Poprawny wynik nie zawsze świadczył o poprawnym rozumowaniu. Zdarzało się, że prawidłowy rezultat był konsekwencją nakładających się błędów, a nie – zastosowania właściwej metody. Ocenianie wyłącznie wyniku końcowego może utrwalac u ucznia fałszywe przekonanie o poprawności zastosowanego sposobu rozwiązania. Konieczne jest zatem zwracanie uwagi na uzasadnienie, dostrzeganie zależności oraz sens wykonywanych działań.

5. Zalecane działania dydaktyczne.

W pracy dydaktycznej warto przesuwac akcent z ćwiczenia pojedynczych umiejętności na modelowanie matematyczne, uzasadnianie i świadome łączenie różnych reprezentacji matematycznych.

W procesie nauczania matematyki należy kształtować następujące umiejętności:

- uważne czytanie treści zadań i poleceń
- sprawność rachunkową, szczególnie wykonywanie obliczeń na liczbach (w tym na pierwiastkach), wyrażeniach algebraicznych oraz obliczeń w geometrii
- posługiwanie się symbolami i zapisywanie zależności ogólnych
- planowanie strategii rozwiązania zadań wieloetapowych i nieschematycznych
- łączenia wiedzy z różnych działów matematyki, zwłaszcza algebry i geometrii
- rozumowanie i argumentowanie, w tym odróżnianie sprawdzenia na konkretnym przykładzie od wykazania zależności ogólnej
- wyobraźnię przestrzenną i elastyczne dostrzeganie różnych sposobów rozwiązania zadań geometrycznych
- ocenę sensowności otrzymanych wyników w kontekście zadań praktycznych.

Aktywności matematyczne sprzyjające pokonywaniu rozpoznanych trudności:

- przed rozpoczęciem obliczeń rozwijać nawyk zapisywania: *Co wiadomo?*, *Czego szukam?*, *Jakie wielkości są ze sobą powiązane?* oraz *Których danych nie należy łączyć?*
- uzasadniać wybór każdego wzoru i wskazywać dane potrzebne do rozwiązania zadania
- rozwijać umiejętność świadomego doboru metody zamiast mechanicznego uruchamiania przypadkowych procedur, np. automatycznego stosowania poznanych wzorów czy twierdzenia Pitagorasa
- przedstawiać treść zadania na różne sposoby: słownie, za pomocą tabeli, diagramu lub schematu oraz algebraicznie
- poszukiwać innych metod rozwiązania lub wskazywać moment, w którym można zmienić strategię
- jak najczęściej zadawać sobie pytania: *Co oznacza otrzymana liczba?*, *Jakiego rzędu wielkości powinien być wynik?*, *Czy w danej sytuacji wynik może być ujemny, większy niż 100% lub niecałkowity?*, *Czy wynik jest zapisany z właściwą jednostką?*, *Czy otrzymany wynik odpowiada na pytanie postawione w poleceniu?*
- budować modele brył oraz korzystać z dostępnych narzędzi multimedialnych, aby rozwijać wyobraźnię przestrzenną
- wykonywać krótkie, regularne ćwiczenia rachunkowe w kontekście rozwiązywanego problemu, połączone ze sprawdzaniem wyniku za pomocą działania odwrotnego lub oszacowania
- analizować rozwiązania uczniowskie i klasyfikować ujawnione w nich błędy według ich rodzaju, np. błędy w odczytaniu danych, wyborze metody, rachunkowe, interpretacyjne.

Podstawowe informacje o arkuszach dostosowanych

Opis arkusza dla uczniów z autyzmem, w tym z zespołem Aspergera

Arkusz z zakresu matematyki dla uczniów z autyzmem, w tym z zespołem Aspergera (OMAP-200-2605) został przygotowany na podstawie arkusza standardowego OMAP-100-2605, zgodnie z zaleceniami specjalistów. Uczniowie otrzymali arkusze dostosowane pod względem graficznym: wyróżniono informację o numerze każdego zadania i liczbie punktów możliwych do uzyskania za jego rozwiązanie, zwiększono odstępy między wierszami w tekstach, zastosowano – jednolity w całym arkuszu – pionowy układ odpowiedzi. W zadaniach zamkniętych umieszczono informacje o sposobie zaznaczenia właściwych odpowiedzi oraz dodano miejsca na rozwiązanie zadań – brudnopis. W zadaniach otwartych uszczegółowiono polecenia i wskazano miejsca na zapisanie odpowiedzi.

Wyniki uczniów z autyzmem, w tym z zespołem Aspergera

WYKRES 5. ROZKŁAD WYNIKÓW UCZNIÓW

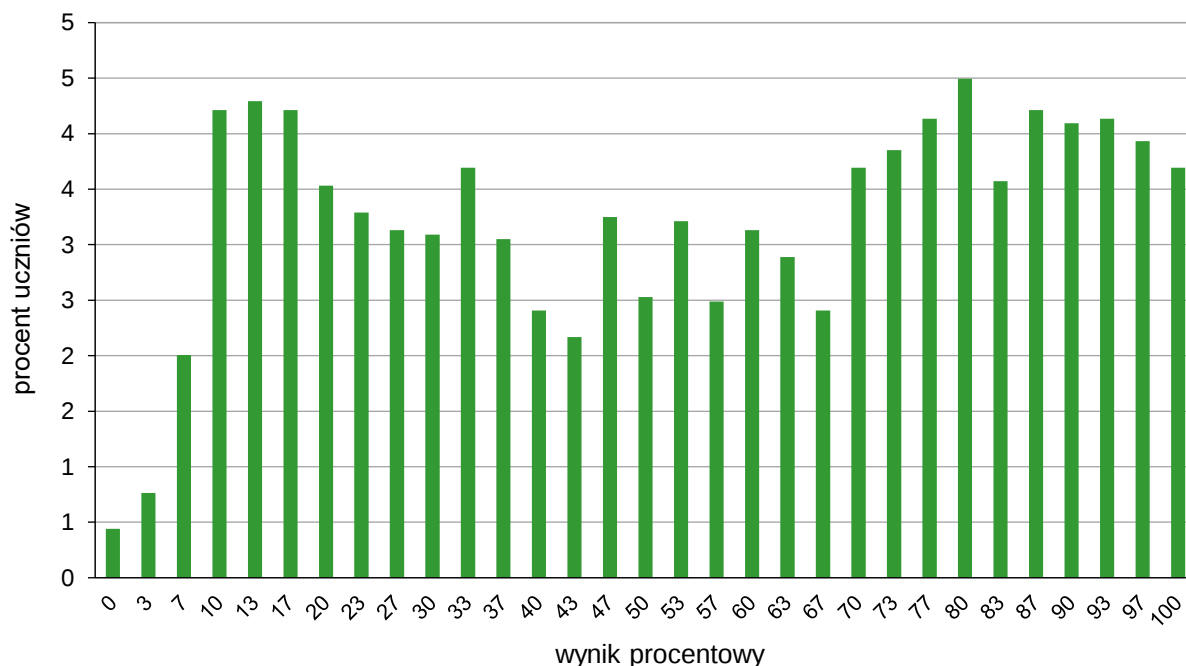


TABELA 12. WYNIKI UCZNIÓW Z AUTYZMEM, W TYM Z ZESPOŁEM ASPERGERA – PARAMETRY STATYSTYCZNE

Liczba uczniów	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
2 492	0	100	57	80	54	29

Opis arkusza dla uczniów słabowidzących i uczniów niewidomych

Arkusze z zakresu matematyki dla uczniów słabowidzących i uczniów niewidomych (OMAP-400-2605, OMAP-500-2605, OMAP-600-2605) zostały przygotowane na podstawie arkusza OMAP-100-2605, zgodnie z zaleceniami specjalistów pracujących z uczniami z dysfunkcją wzroku. Uczniowie słabowidzący otrzymali arkusze, w których dostosowano wielkość czcionki (odpowiednio Arial 16 pkt i Arial 24 pkt), odstępy między wierszami, zmodyfikowano słownictwo i polecenia w zadaniach, uproszczono lub powiększono formy graficzne albo zastąpiono formy graficzne opisem oraz zastosowano – jednolity w całym arkuszu – pionowy układ odpowiedzi.

Dla uczniów niewidomych przygotowano arkusz w brajlu.

Wyniki uczniów słabowidzących i uczniów niewidomych

WYKRES 6. ROZKŁAD WYNIKÓW UCZNIÓW

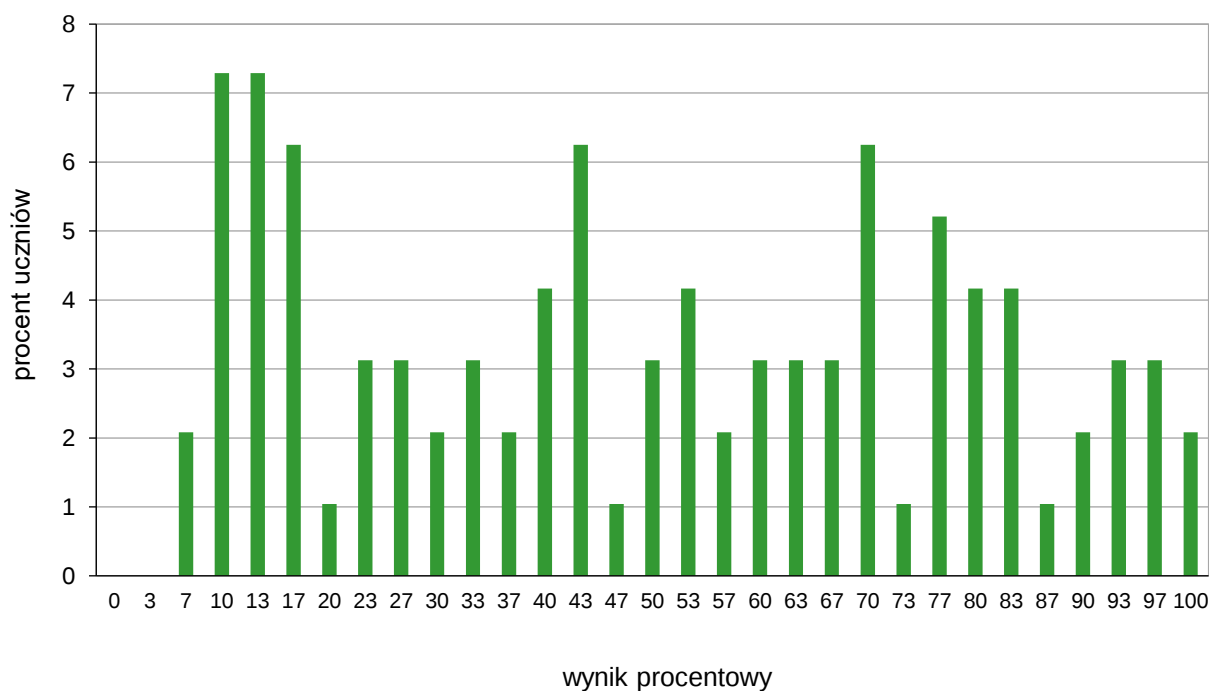


TABELA 13. WYNIKI UCZNIÓW SŁABOWIDZĄCYCH I UCZNIÓW NIEWIDOMYCH – PARAMETRY STATYSTYCZNE

Liczba uczniów	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
96	7	100	50	10	50	28

Opis arkusza dla uczniów słabosłyszących i uczniów niesłyszących

Uczniowie słabosłyszący i uczniowie niesłyszący rozwiązywali zadania zawarte w arkuszu OMAP-700-2605, który został przygotowany na podstawie arkusza OMAP-100-2605 i dostosowany do ich dysfunkcji przez specjalistów. Trzony zadań i polecenia uproszczono, ograniczając je do niezbędnych informacji oraz dostosowano słownictwo. Wyróżniono podkreśleniami istotne do rozwiązywania zadań informacje, uszczegółowiono opis rysunków. Treści zadań dodatkowo zilustrowano różnymi formami graficznymi. W niektórych zadaniach otwartych zastosowano dodatkowe polecenia, które stopniowo prowadzą ucznia do uzyskania oczekiwanego rozwiązania zadania.

Wyniki uczniów słabosłyszących i uczniów niesłyszących

WYKRES 7. ROZKŁAD WYNIKÓW UCZNIÓW

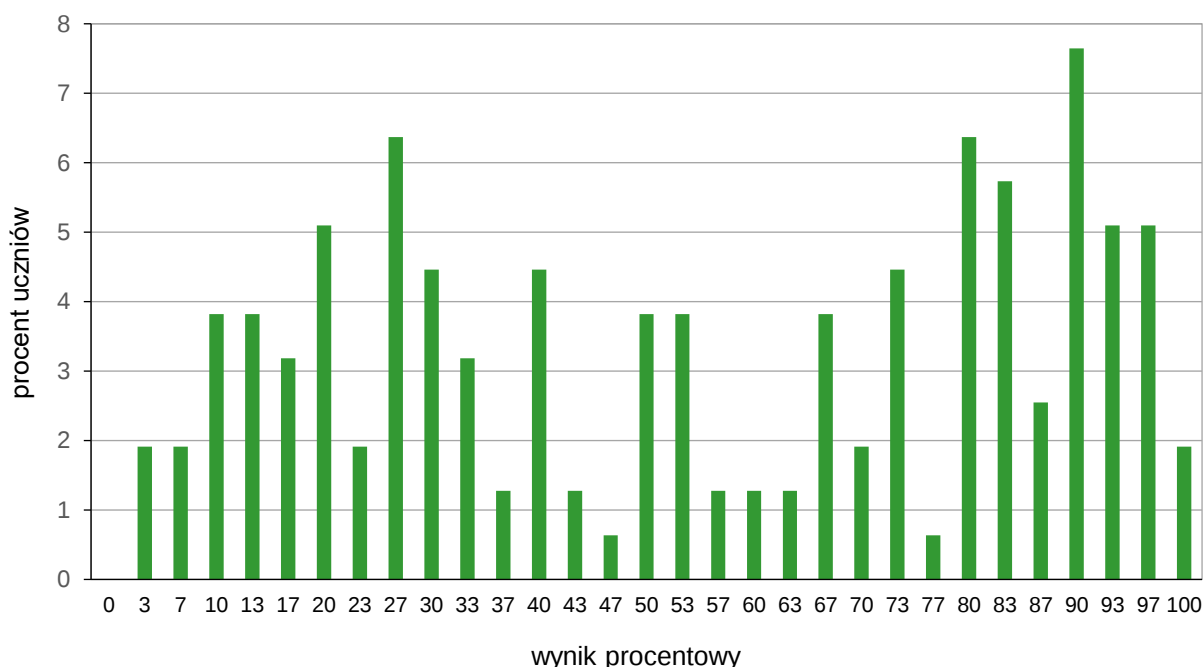


TABELA 14. WYNIKI UCZNIÓW SŁABOSŁYSZĄCYCH I UCZNIÓW NIEŚŁYSZĄCYCH – PARAMETRY STATYSTYCZNE

Liczba uczniów	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
157	3	100	53	90	55	30

Opis arkusza dla uczniów z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu lekkim

Uczniowie z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu lekkim rozwiązywali zadania zawarte w arkuszu OMAP-800-2605. Arkusz egzaminacyjny zawierał 18 zadań: 10 zamkniętych i 8 otwartych. Wśród zadań zamkniętych były zadania wyboru wielokrotnego i zadania typu prawda-falsz. Zadania otwarte wymagały od uczniów samodzielnego sformułowania rozwiązania i zapisania odpowiedzi. Za poprawne rozwiązanie wszystkich zadań uczeń mógł otrzymać maksymalnie 30 punktów (15 punktów za zadania zamknięte i 15 punktów za zadania otwarte). Treści dziewięciu zadań dodatkowo zilustrowano za pomocą rysunków, które ułatwiały udzielenie poprawnych odpowiedzi. Wiele z nich nawiązywało do sytuacji życiowych bliskich uczniowi.

Wyniki uczniów z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu lekkim

WYKRES 8. ROZKŁAD WYNIKÓW UCZNIÓW

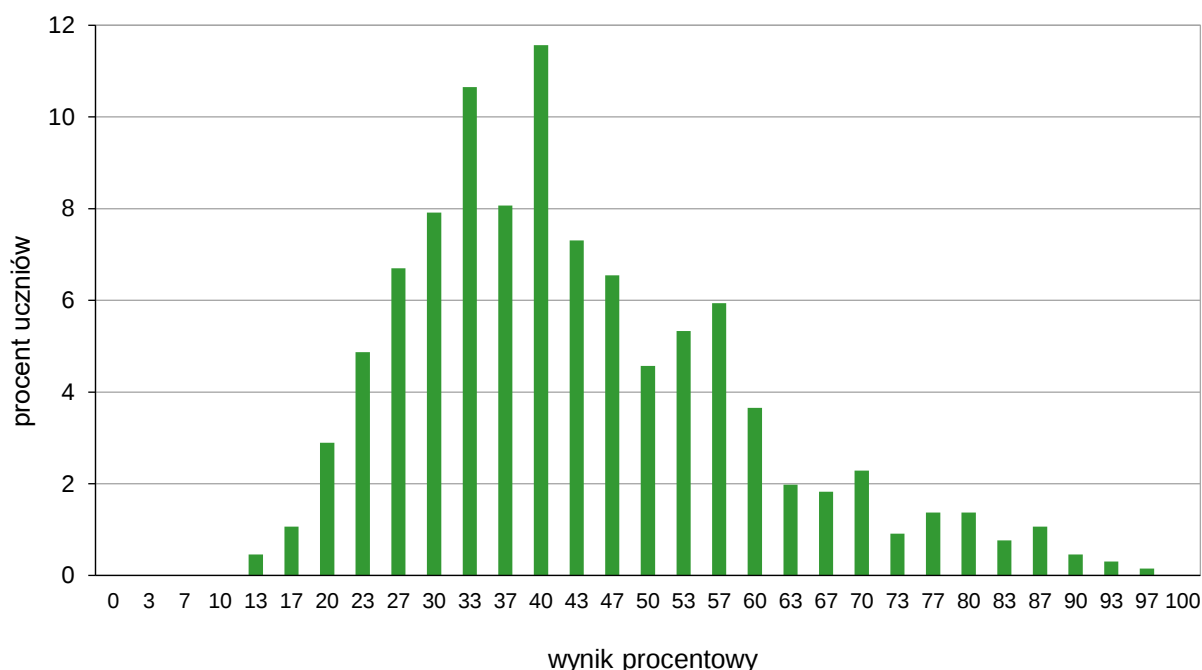


TABELA 15. WYNIKI UCZNIÓW Z NIEPEŁNOSPRAWNOŚCIĄ INTELEKTUALNĄ W STOPNIU LEKKIM – PARAMETRY STATYSTYCZNE

Liczba uczniów	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
657	13	97	40	40	43	16

Opis arkusza dla uczniów z afazją

Uczniowie z afazją rozwiązywali zadania zawarte w arkuszu OMAP-900-2605. Arkusz egzaminacyjny zawierał 18 zadań: 11 zamkniętych i 7 otwartych. Wśród zadań zamkniętych było 8 zadań wyboru wielokrotnego i 3 zadania typu prawda-falsz. Zadania otwarte wymagały od uczniów samodzielnego sformułowania rozwiązania oraz zapisania odpowiedzi. Za poprawne rozwiązanie wszystkich zadań uczeń mógł otrzymać maksymalnie 30 punktów (14 punktów za zadania zamknięte i 16 punktów za zadania otwarte). Arkusz został dostosowany zgodnie z zaleceniami specjalistów. Uczniowie otrzymali arkusze dostosowane pod względem graficznym: zastosowano czcionkę Arial 14 pkt, każde zadanie umieszczono na osobnej stronie, wyróżniono informację o numerze zadania i liczbie punktów możliwych do uzyskania za jego rozwiązanie, zwiększono odstępy między wierszami w tekstach i powiększono rysunki, zastosowano – jednolity w całym arkuszu – pionowy układ odpowiedzi. Przy każdym zadaniu zamkniętym umieszczono informację o sposobie zaznaczenia właściwej odpowiedzi.

Wyniki uczniów z afazją

WYKRES 9. ROZKŁAD WYNIKÓW UCZNIÓW

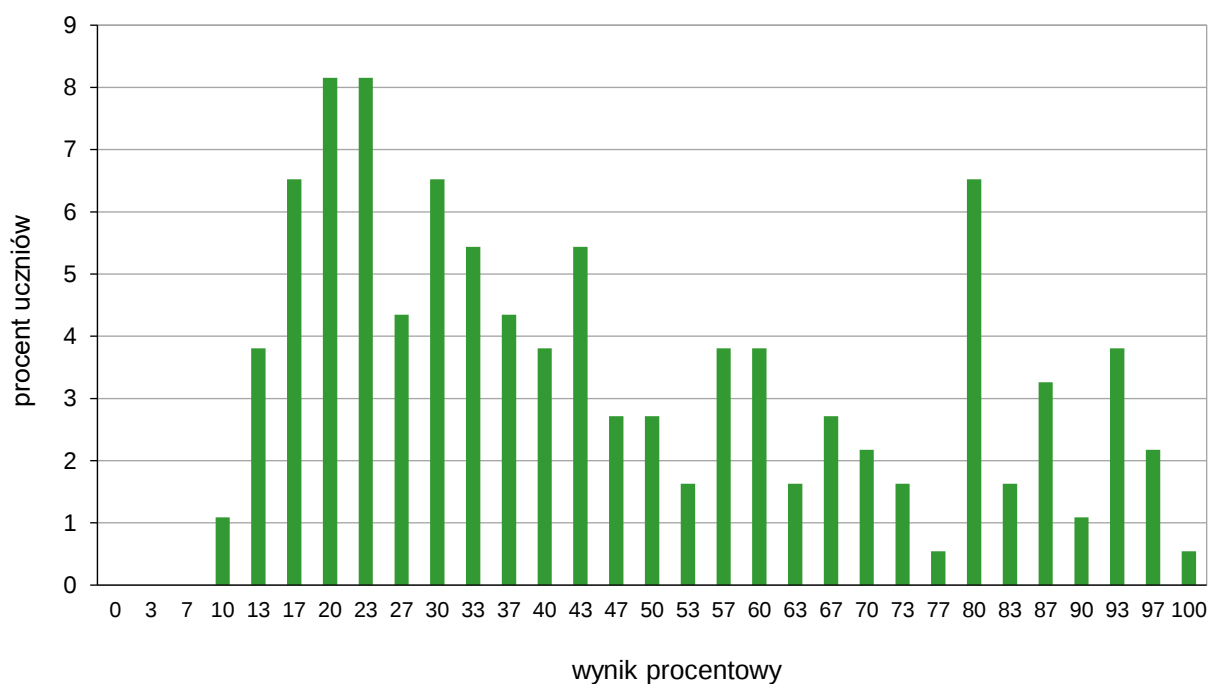


TABELA 16. WYNIKI UCZNIÓW Z AFAZJĄ – PARAMETRY STATYSTYCZNE

Liczba uczniów	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
184	10	100	40	20	46	25

Opis arkusza dla uczniów z niepełnosprawnością ruchową spowodowaną mózgowym porażeniem dziecięcym

Uczniowie z niepełnosprawnością ruchową spowodowaną mózgowym porażeniem dziecięcym rozwiązywali zadania zawarte w arkuszu OMAP-Q00-2605. Arkusz egzaminacyjny zawierał 18 zadań: 11 zamkniętych i 7 otwartych. Wśród zadań zamkniętych było 8 zadań wyboru wielokrotnego i 3 zadania typu prawda-fałsz. Zadania otwarte wymagały od uczniów samodzielnego sformułowania rozwiązania oraz zapisania odpowiedzi. Za poprawne rozwiązanie wszystkich zadań uczeń mógł otrzymać maksymalnie 30 punktów (14 punktów za zadania zamknięte i 16 punktów za zadania otwarte). Arkusz został dostosowany zgodnie z zaleceniami specjalistów. Uczniowie otrzymali arkusze dostosowane pod względem graficznym: zastosowano czcionkę Arial 14 pkt, każde zadanie umieszczono na osobnej stronie, wyróżniono informację o numerze zadania i liczbie punktów możliwych do uzyskania za jego rozwiązanie, zwiększono odstępy między wierszami w tekstach i powiększono rysunki, zastosowano – jednolity w całym arkuszu – pionowy układ odpowiedzi. Przy każdym zadaniu zamkniętym umieszczono informację o sposobie zaznaczenia właściwej odpowiedzi.

Wyniki uczniów z niepełnosprawnością ruchową spowodowaną mózgowym porażeniem dziecięcym

WYKRES 10. ROZKŁAD WYNIKÓW UCZNIÓW

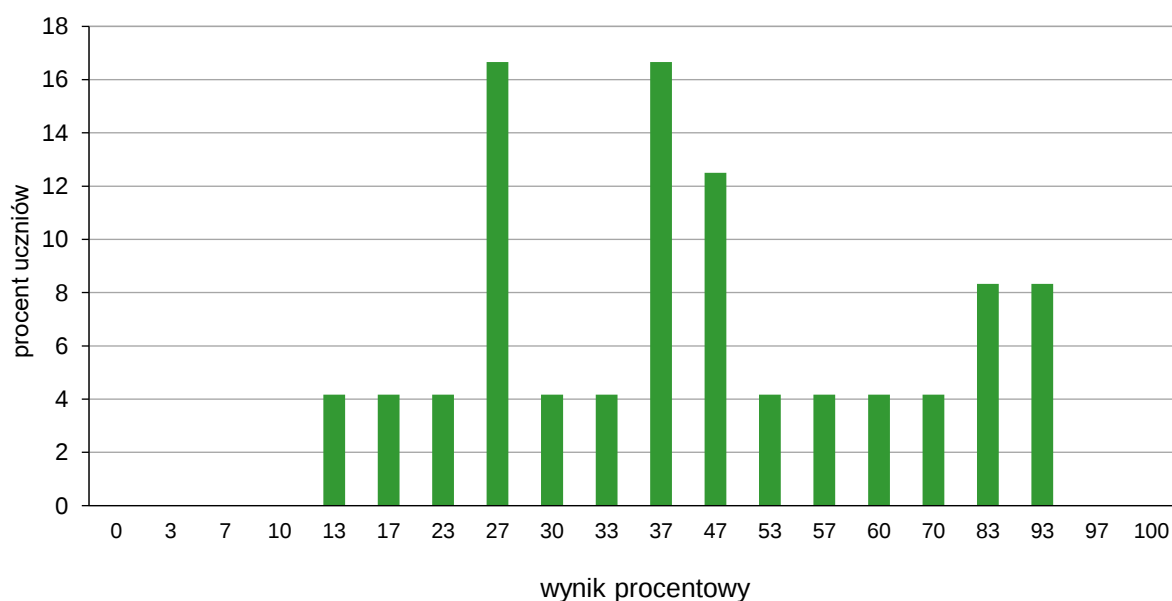


TABELA 17. WYNIKI UCZNIÓW Z NIEPEŁNOSPRAWNOŚCIĄ RUCHOWĄ SPOWODOWANĄ MÓZGOWYM PORĄŻENIEM DZIECIĘCYM – PARAMETRY STATYSTYCZNE

Liczba uczniów	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
24	13	93	37	27 ^a	46	24

^a – istnieją dwie wartości modalne. Podano wartość najmniejszą.

Opis arkusza dla uczniów, o których mowa w art. 94a ust. 1 ustawy (cudzoziemcy)

Uczniowie, o których mowa w art. 94a ust. 1 ustawy (cudzoziemcy), rozwiązywali zadania zawarte w arkuszu OMAP-C00-2605. Ten arkusz składał się z 20 zadań: 14 zamkniętych oraz 6 otwartych. Za poprawne rozwiązanie wszystkich zadań uczeń mógł otrzymać maksymalnie 30 punktów (14 punktów za zadania zamknięte i 16 punktów za zadania otwarte). Arkusz był dostosowany do potrzeb zdających, którym ograniczona znajomość języka polskiego utrudnia zrozumienie czytanego tekstu.

Wyniki uczniów, o których mowa w art. 94a ust. 1 ustawy (cudzoziemcy)

WYKRES 11. ROZKŁAD WYNIKÓW UCZNIÓW

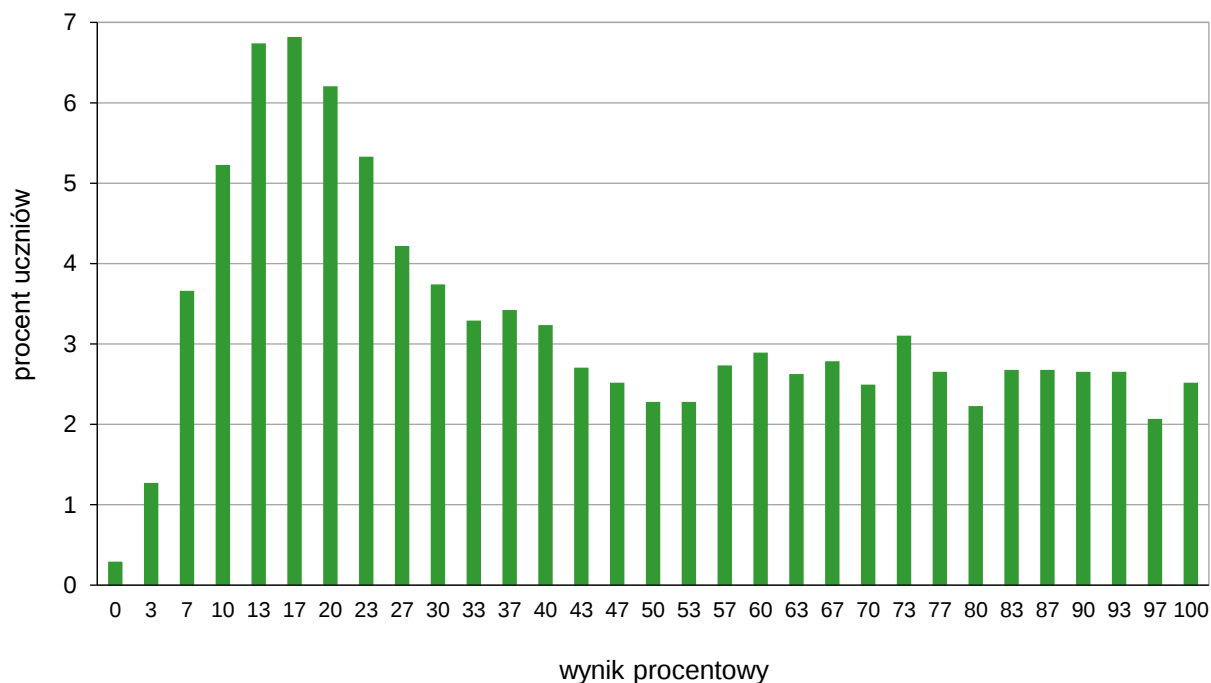


TABELA 18. WYNIKI UCZNIÓW, O KTÓRYCH MOWA W ART.94A UST.1 USTAWY (CUDZOZIEMCY) – PARAMETRY STATYSTYCZNE

Liczba uczniów	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
3 770	0	100	37	17	45	29

Opis arkusza dla uczniów z zaburzeniem widzenia barw

Arkusz z zakresu matematyki dla uczniów z zaburzeniem widzenia barw (OMAP-K00-2605) został przygotowany na podstawie arkusza standardowego OMAP-100-2605. Zgodnie z zaleceniami specjalistów wszystkie rysunki, ilustracje i elementy graficzne zostały wykonane w odcieniach szarości.

Wyniki uczniów z zaburzeniem widzenia barw

WYKRES 13.

ROZKŁAD WYNIKÓW UCZNIÓW

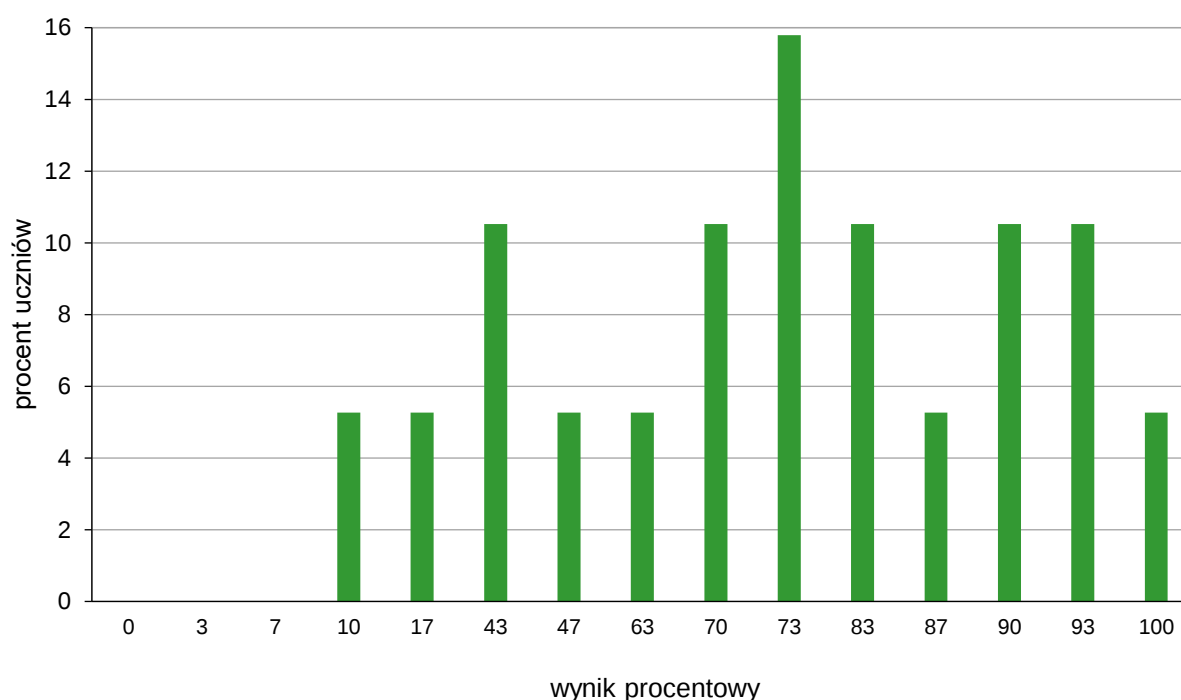


TABELA 21.

WYNIKI UCZNIÓW Z ZABURZENIEM WIDZENIA BARW – PARAMETRY STATYSTYCZNE

Liczba uczniów	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
19	10	100	73	73	68	26

