

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

KOD

|  |  |  |
|--|--|--|
|  |  |  |
|--|--|--|

PESEL

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

*Miejsce na naklejkę.*  
*Sprawdź, czy kod na naklejce to*  
**M-400.**

**Egzamin maturalny**

**Formuła 2023**

# MATEMATYKA

## Poziom rozszerzony

**TEST DIAGNOSTYCZNY**

*Symbol arkusza*

**M**MAP-R0-**400**-2412

DATA: **12 grudnia 2024 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS TRWANIA: **do 270 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

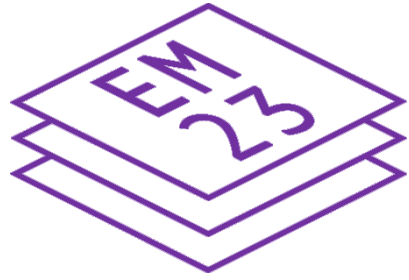
Uprawnienia zdającego do:

dostosowania zasad oceniania.

**Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym**

1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronach 2 oraz 3.





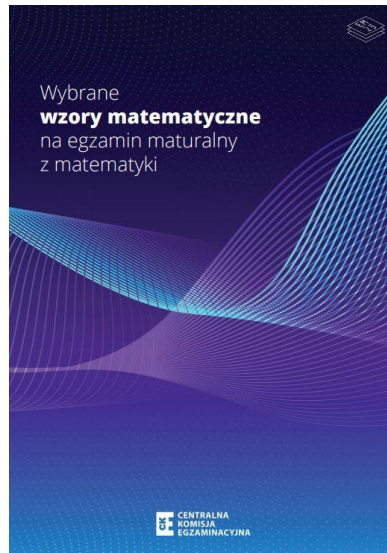
## Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 53 strony (zadania 1–13).  
Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
3. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym przy każdym zadaniu.
4. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.

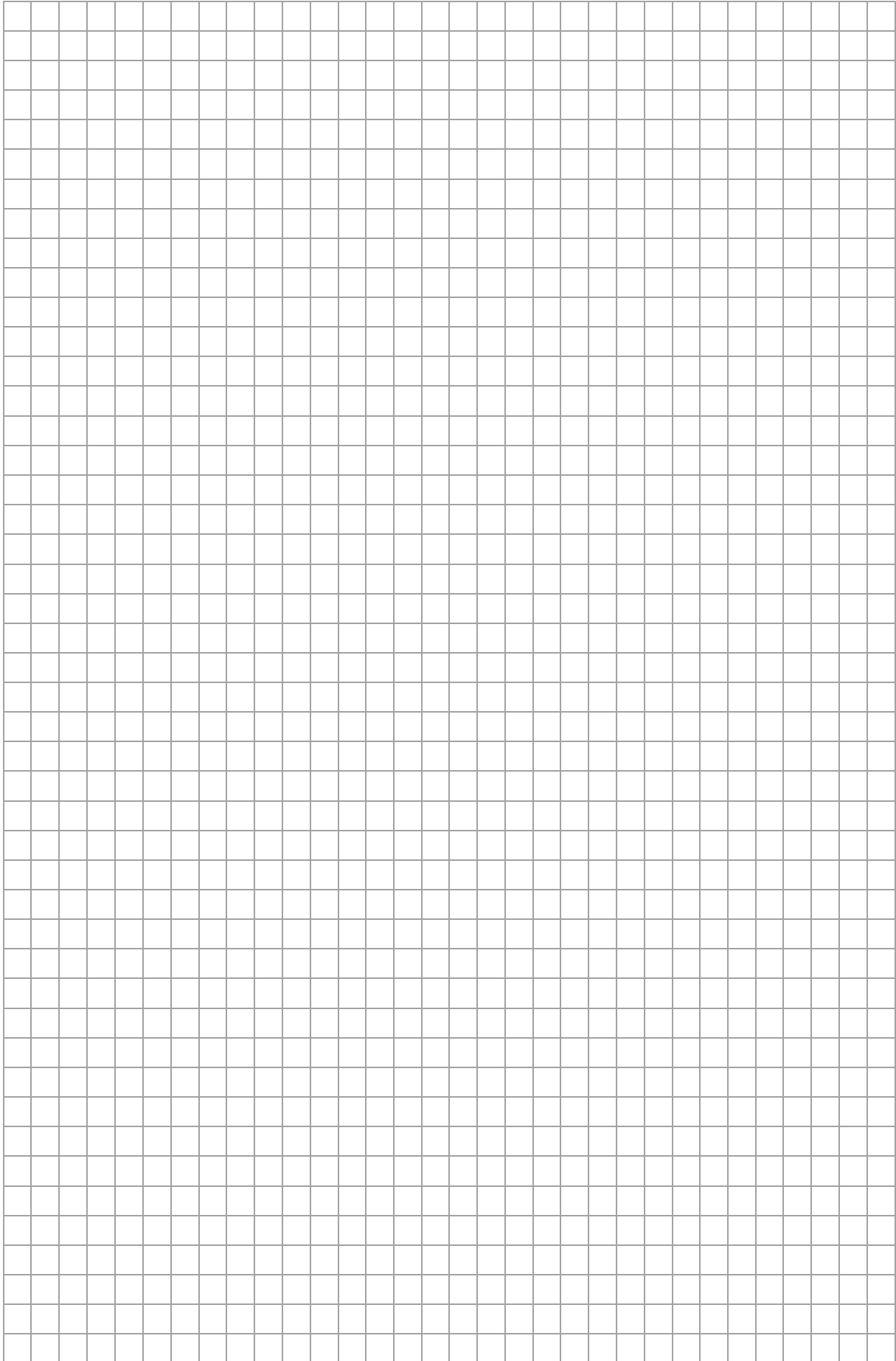


7. Możesz korzystać z „Wybranych wzorów matematycznych”, cyrkla i linijki oraz z kalkulatora prostego.

Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



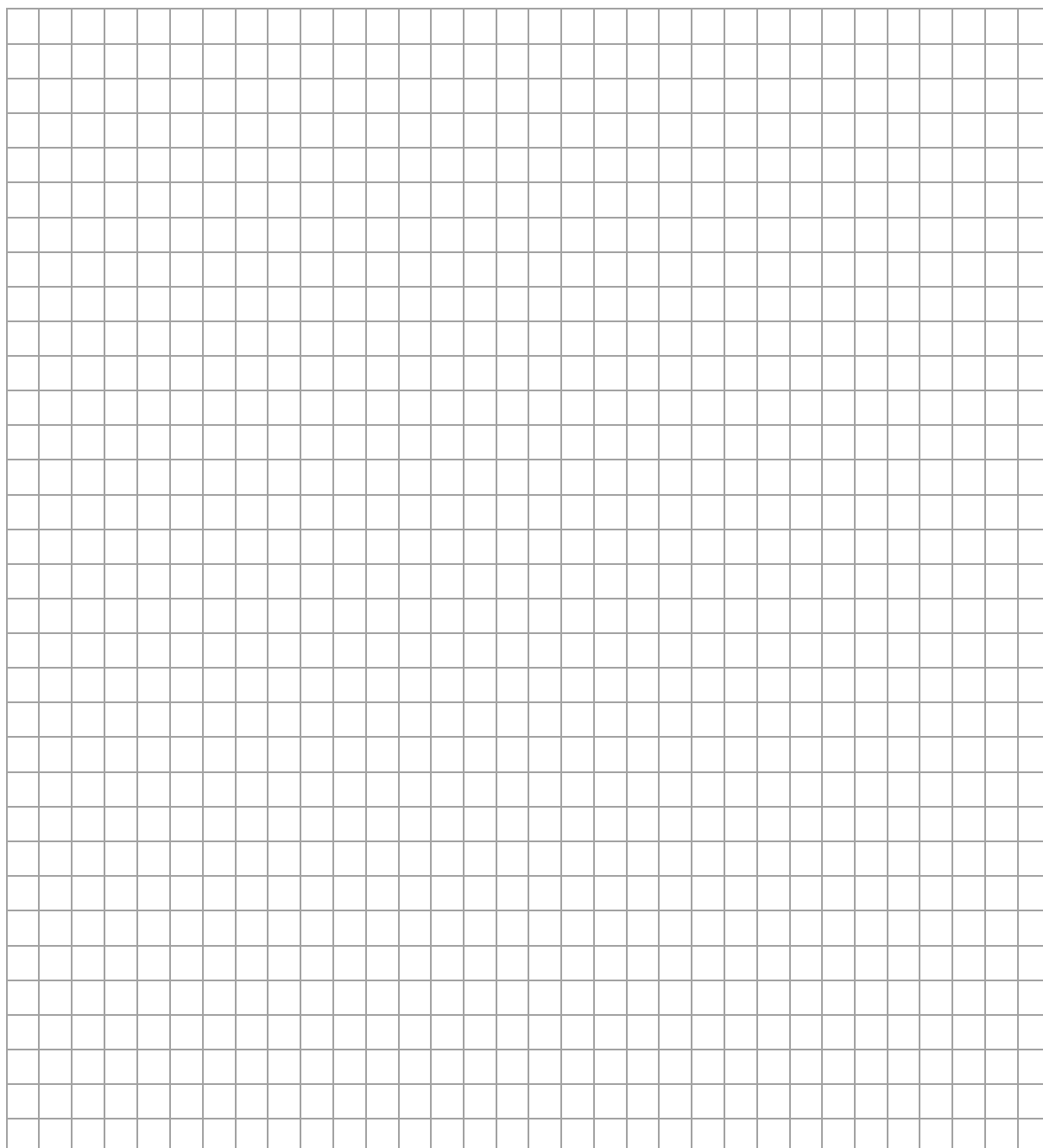


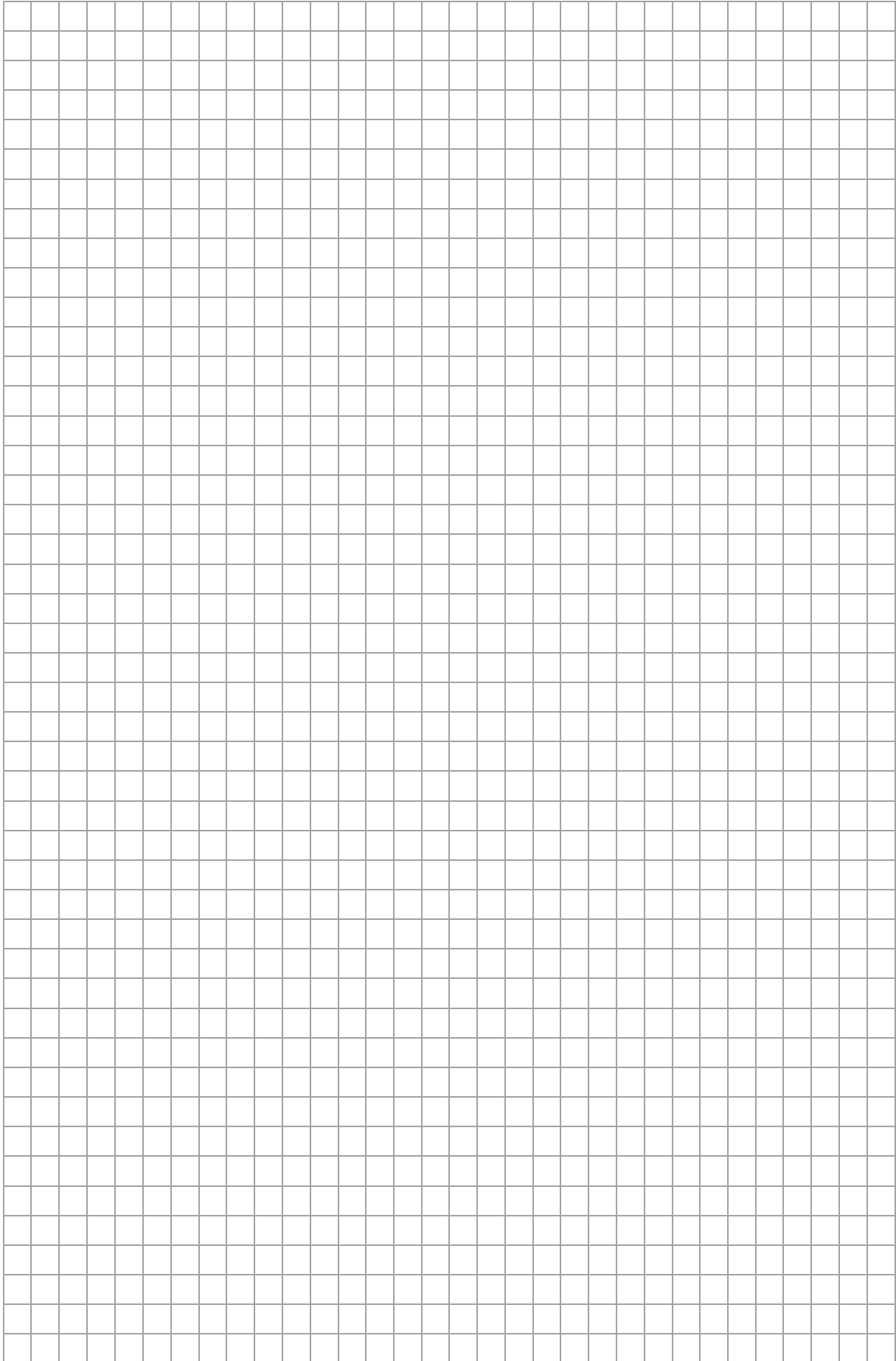


**Zadanie 2. (0–2)**

Okrąg  $\mathcal{O}$  jest styczny do boków  $AC$  i  $BC$  trójkąta  $ABC$  oraz przecina bok  $AB$  tego trójkąta w punktach  $M$  oraz  $N$ , przy czym  $0 < |AM| < |AN| < |AB|$ .

Wykaż, że jeśli  $|AM| = |BN|$ , to trójkąt  $ABC$  jest równoramienny.



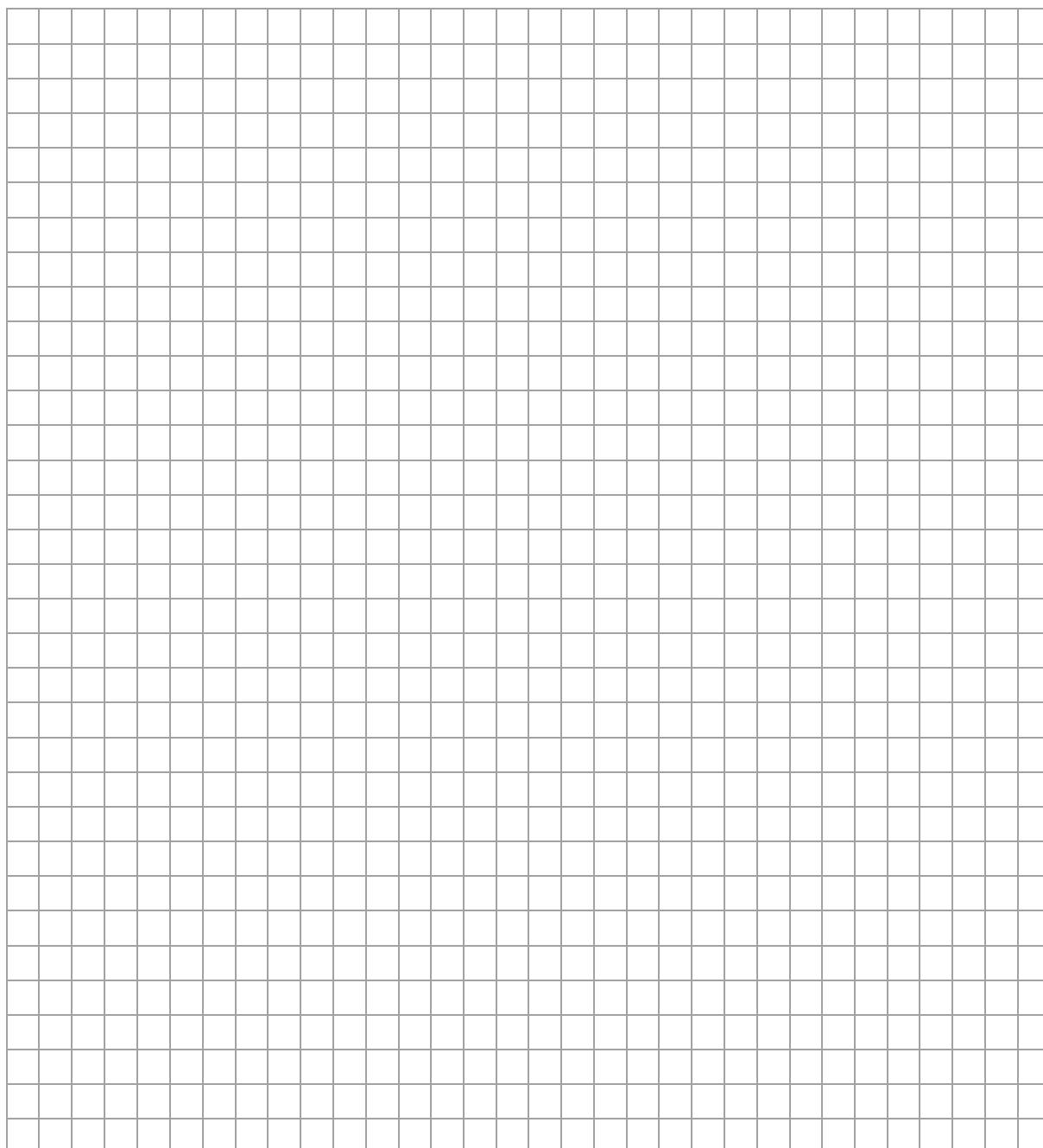


**Zadanie 3. (0–3)**

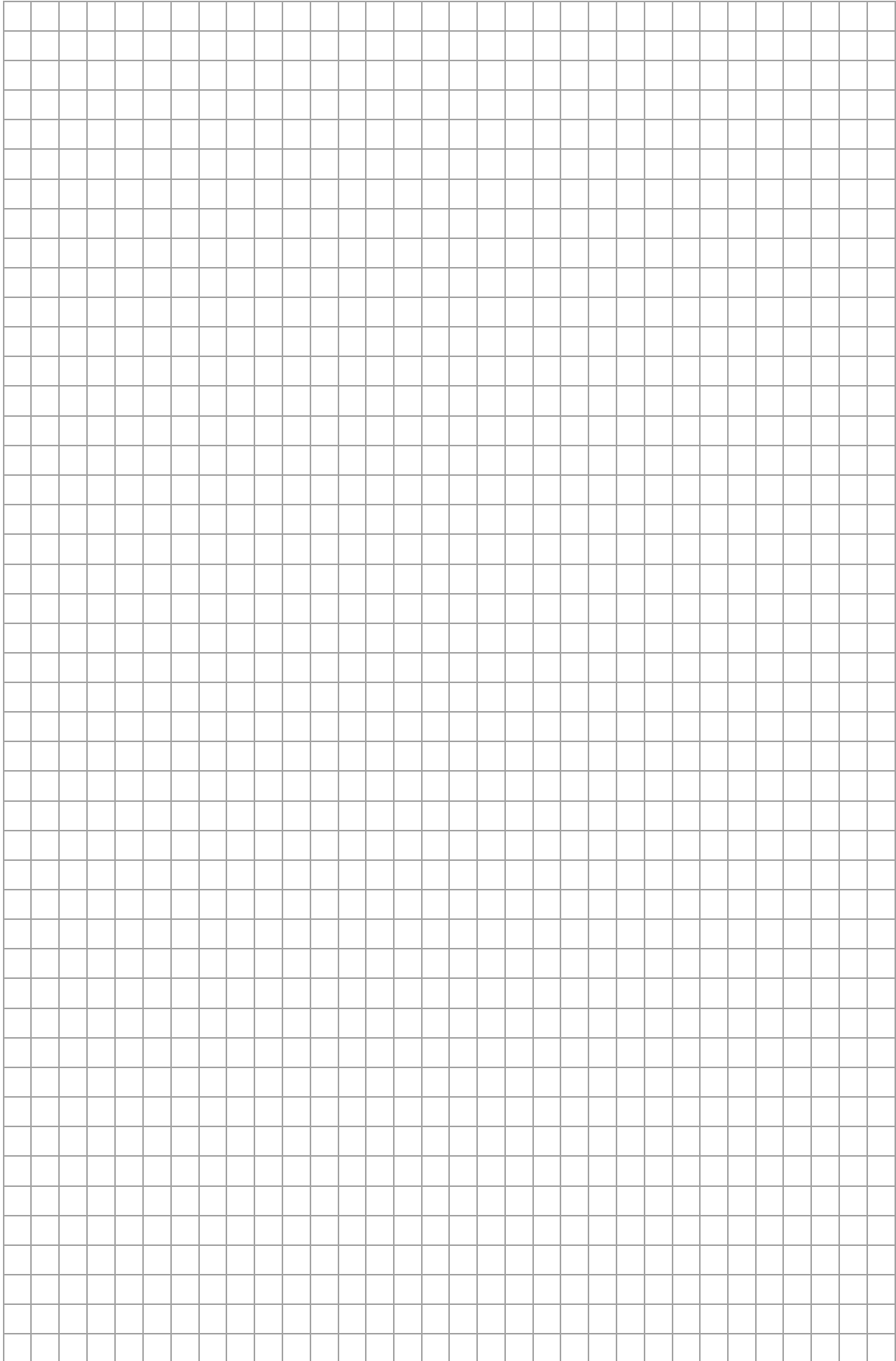
Iloczyn długości średnicy podstawy walca i wysokości walca jest równy  $12\sqrt{3}$ .

Pole powierzchni całkowitej tego walca jest równe  $12\pi(\sqrt{3} + 1)$ .

Oblicz objętość tego walca. Zapisz obliczenia.



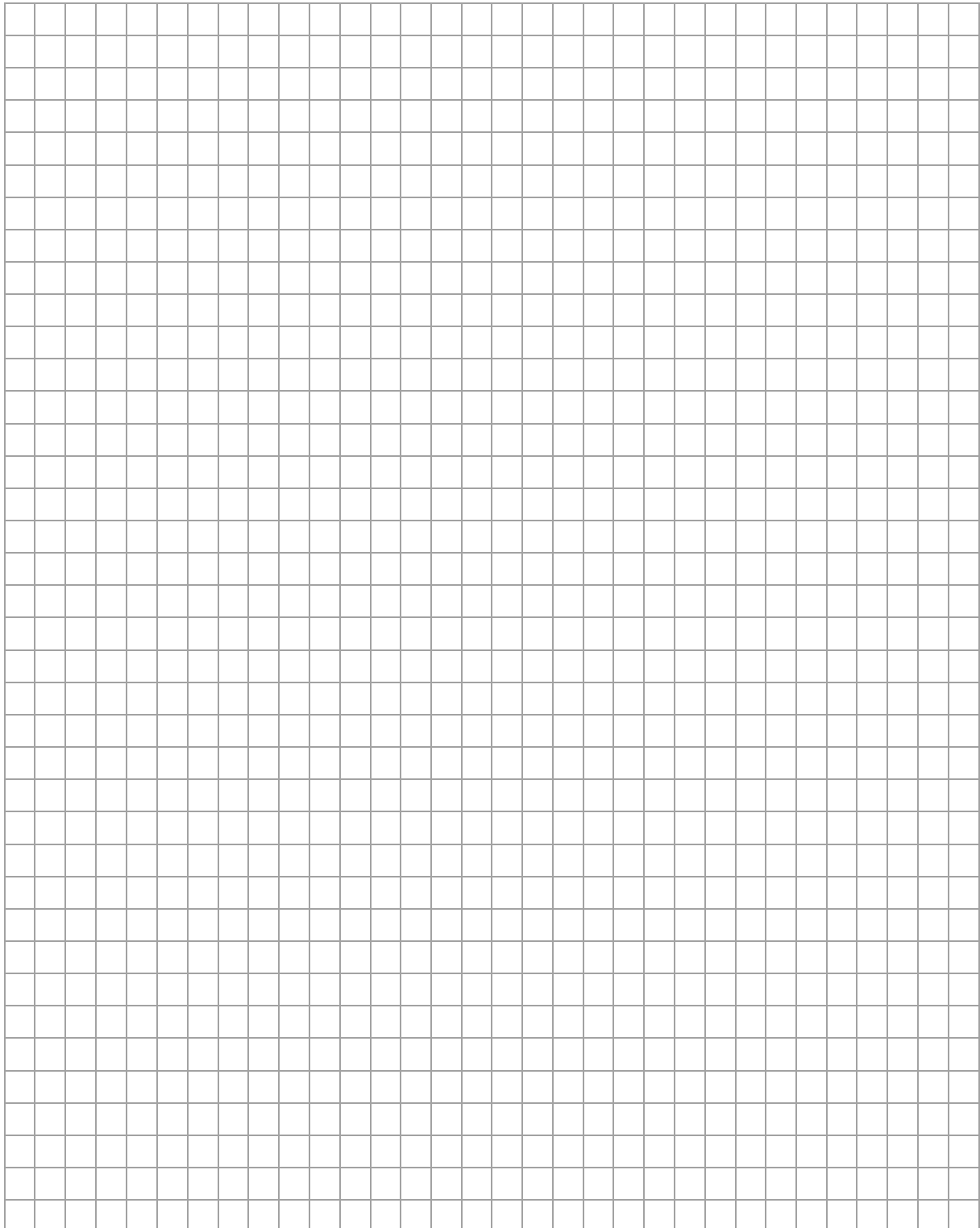


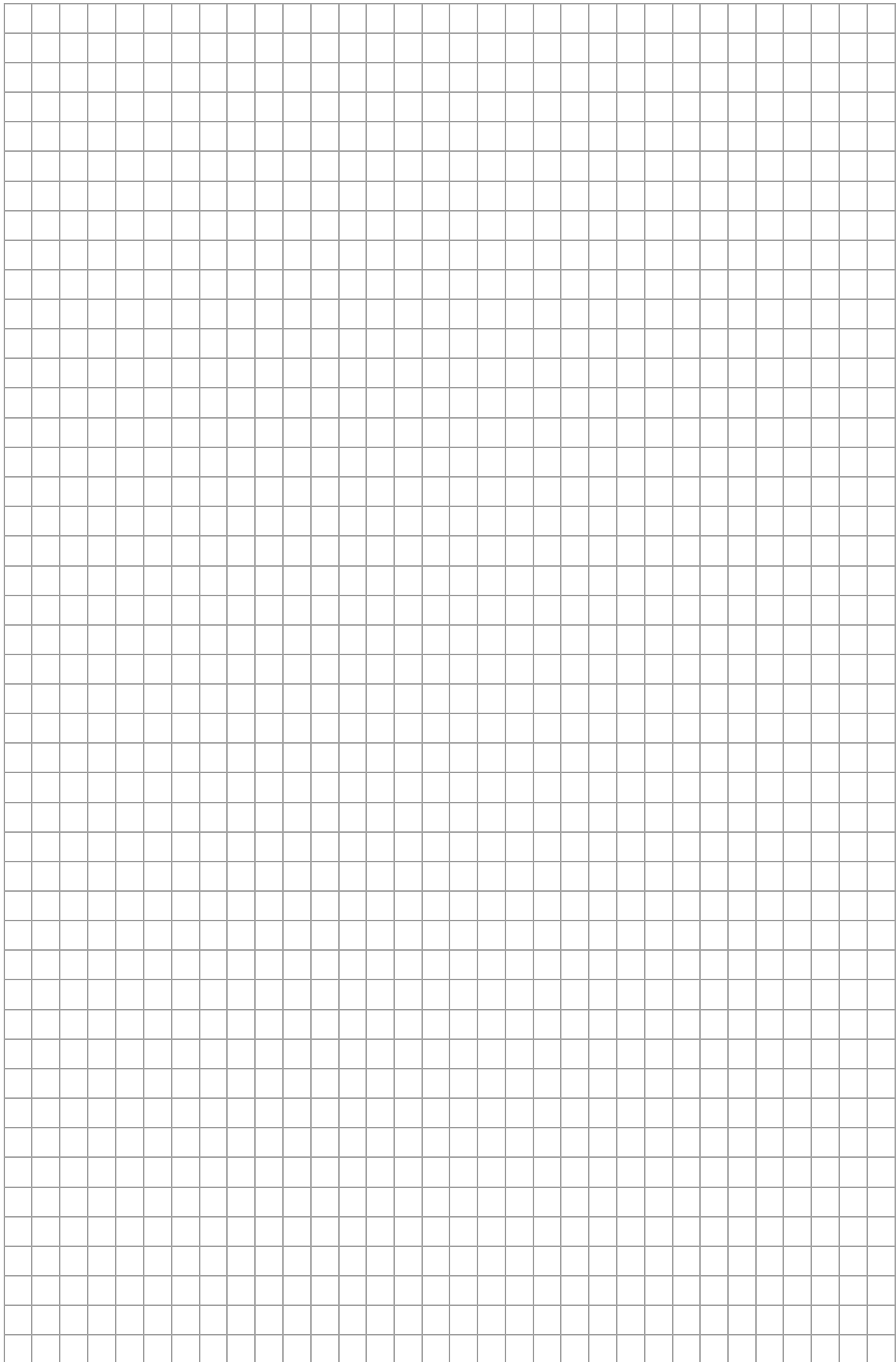


#### Zadanie 4. (0–3)

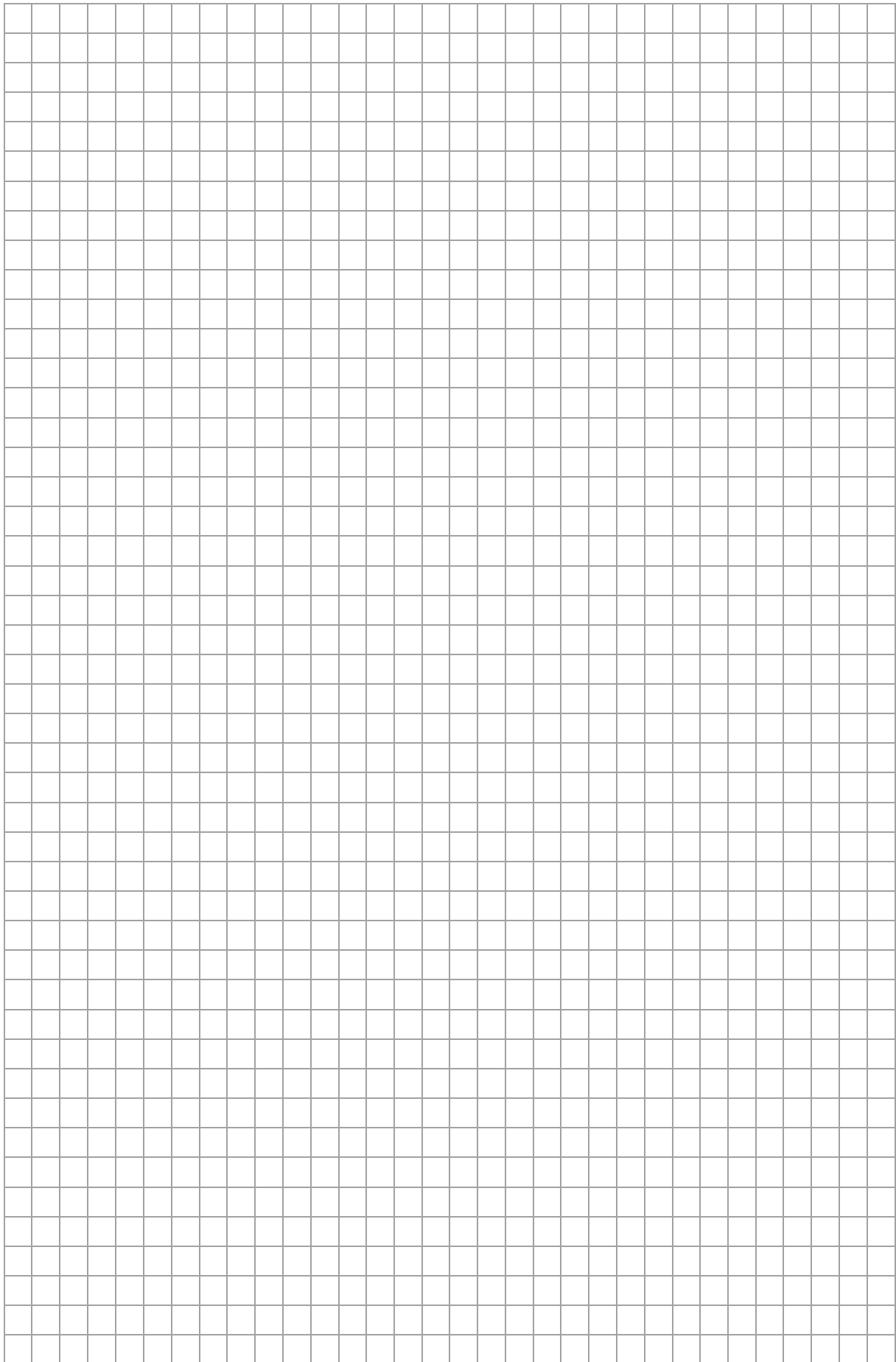
Wykaż, że

$$\frac{1}{\log_2 35 + 1} + \frac{1}{\log_7 140 - \log_7 2} + \frac{1}{\log_5 7 + \log_5 2 + 1} = 1$$







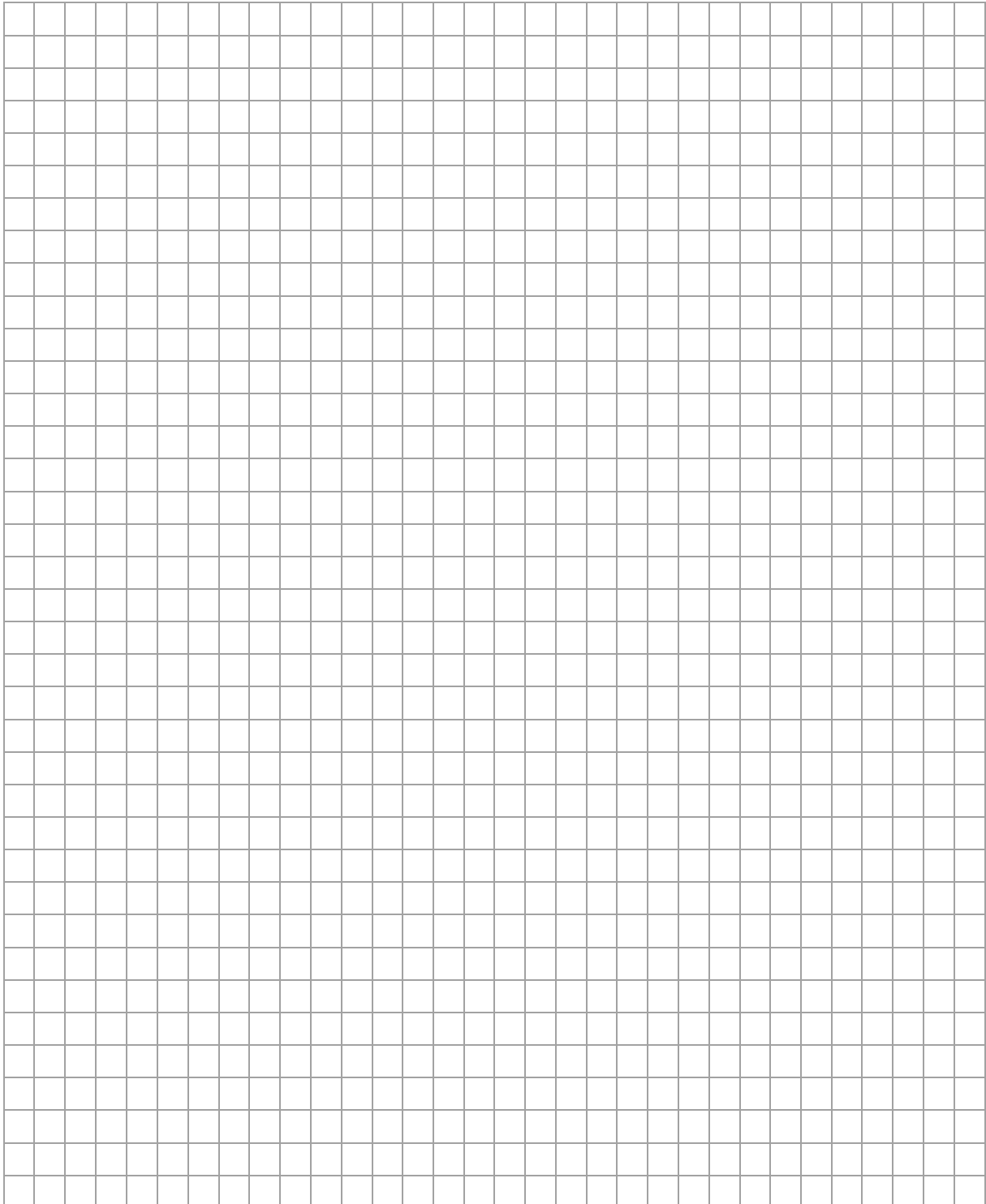


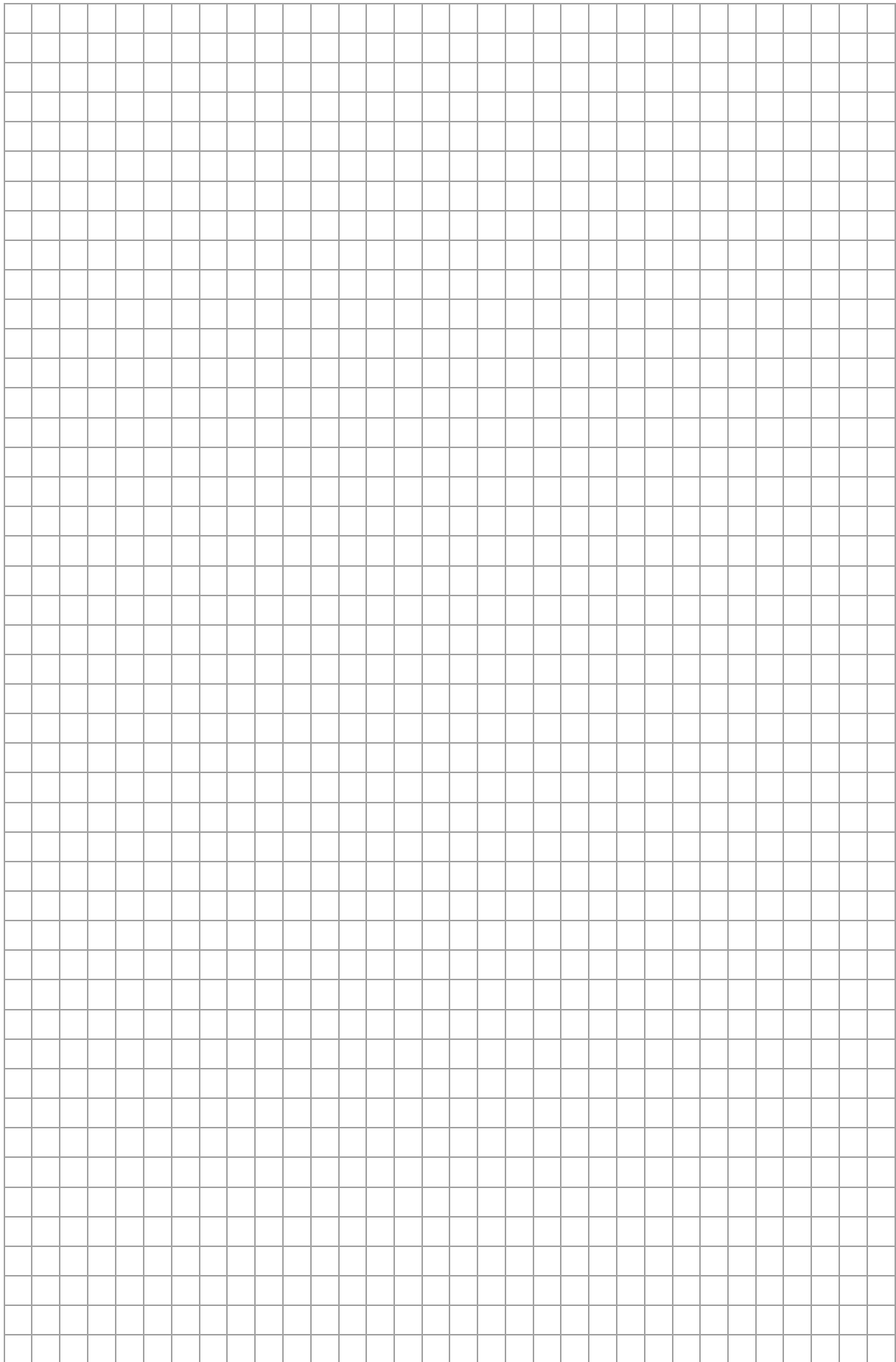
**Zadanie 6. (0–4)**

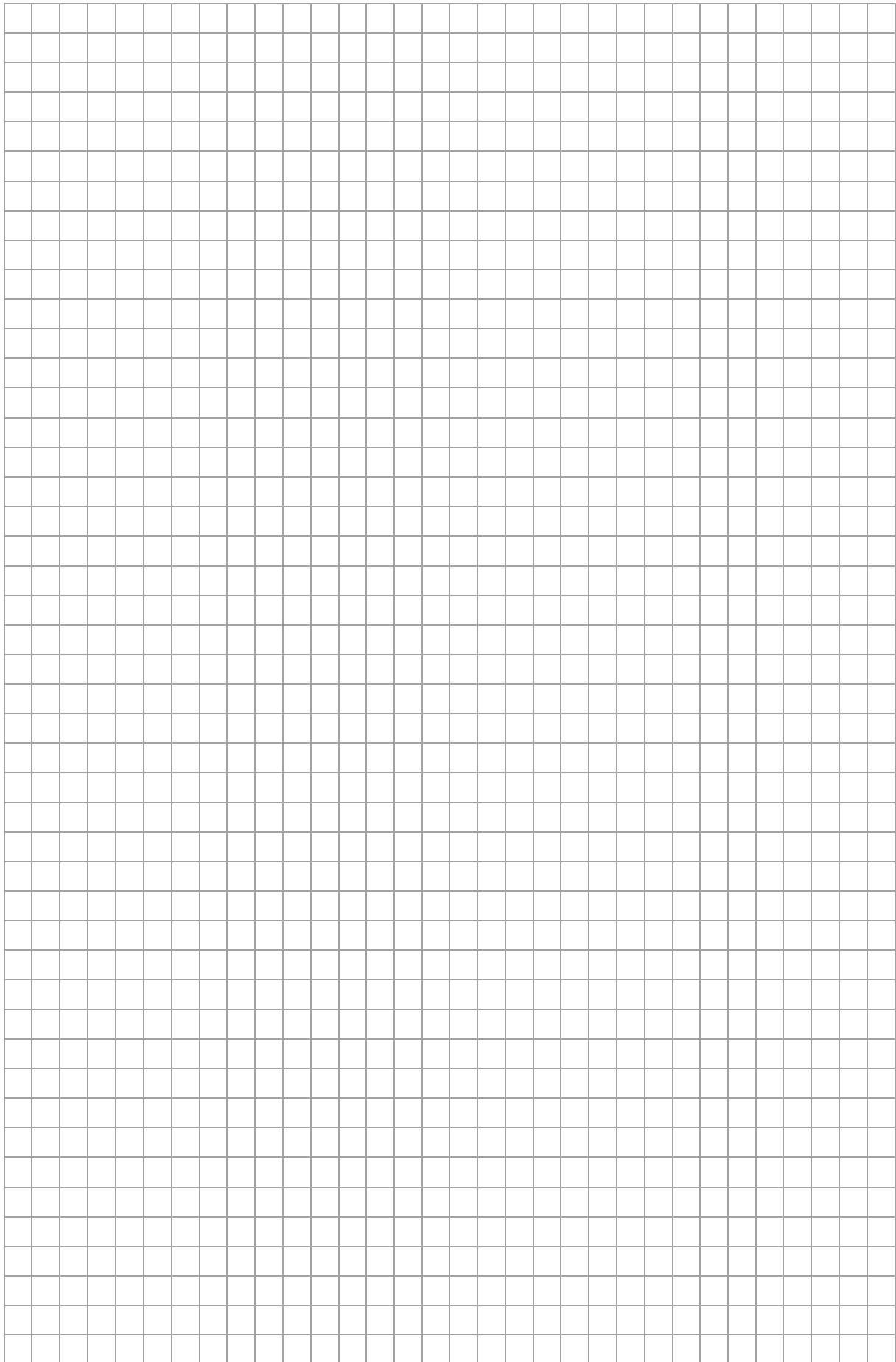
Rozwiąż równanie

$$|4x - 8| + |x - 2| = |2 - x| + |x + 2| + 4$$

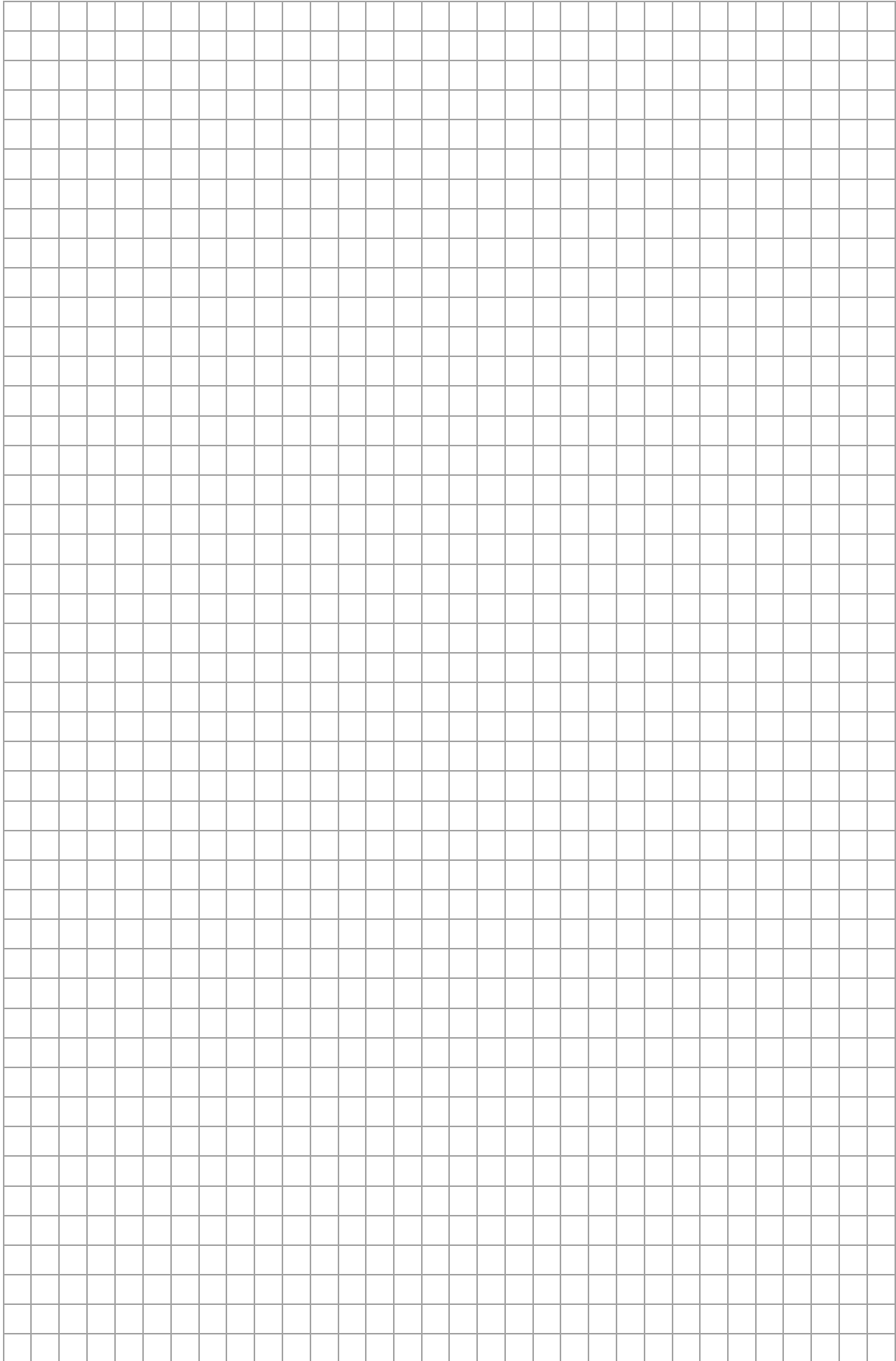
Zapisz obliczenia.











### Zadanie 7. (0–4)

W kartezjańskim układzie współrzędnych  $(x, y)$  dane są:

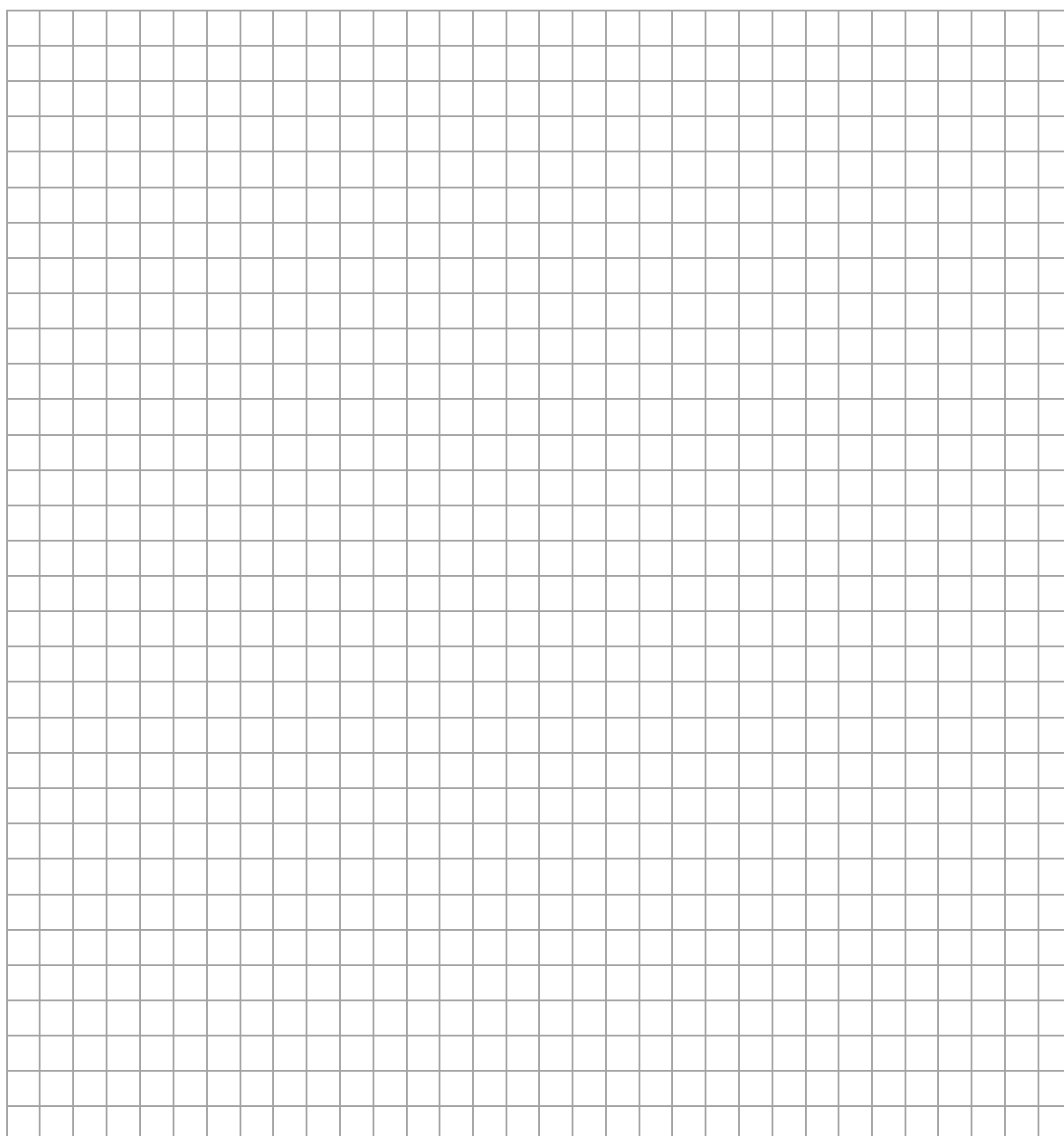
okrąg o równaniu  $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 50$

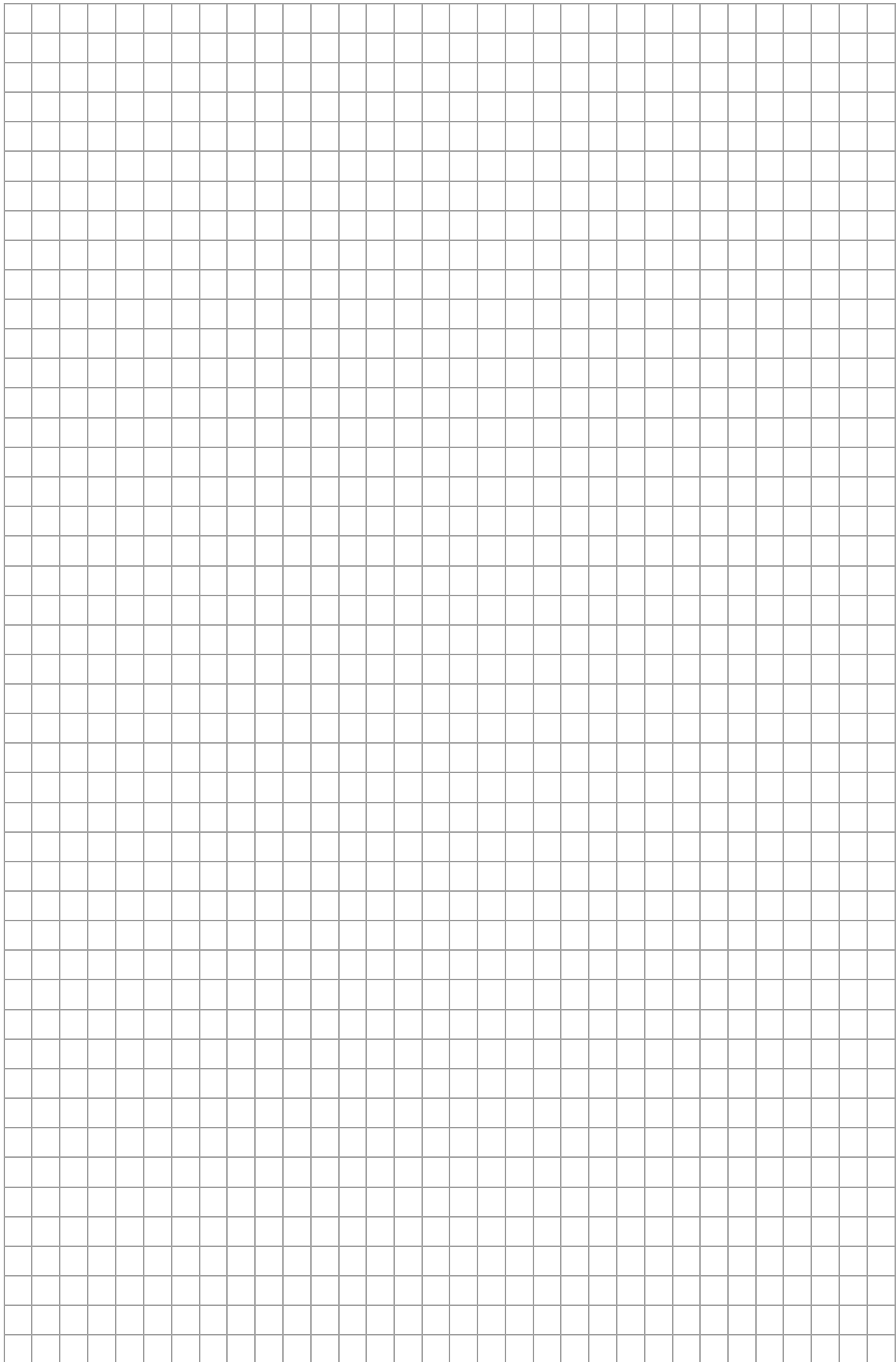
i punkty  $A = (6, 4)$  oraz  $B = (-6, 8)$ .

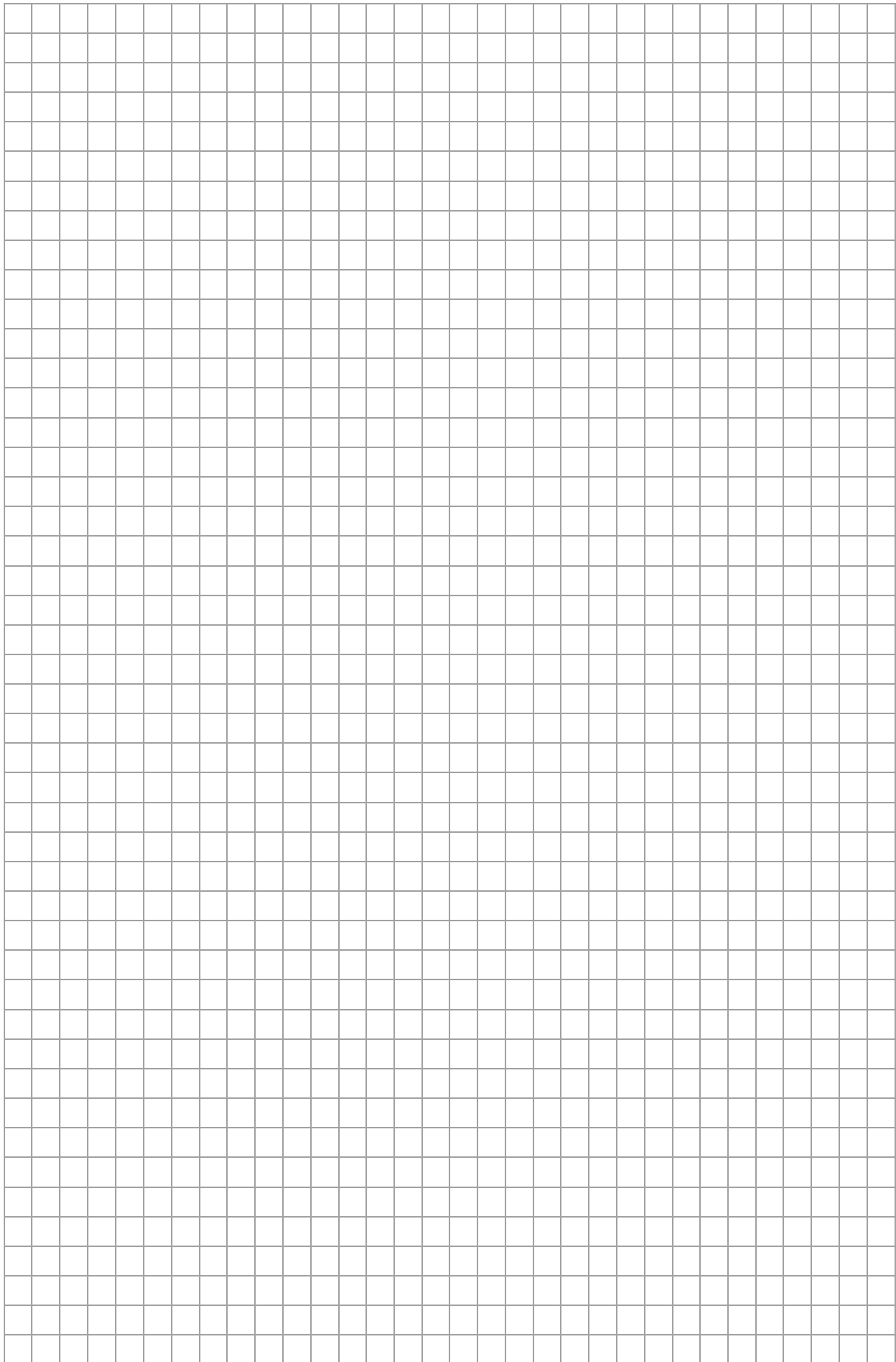
Punkt  $C$  leży na tym okręgu i  $|AC| = |BC|$ .

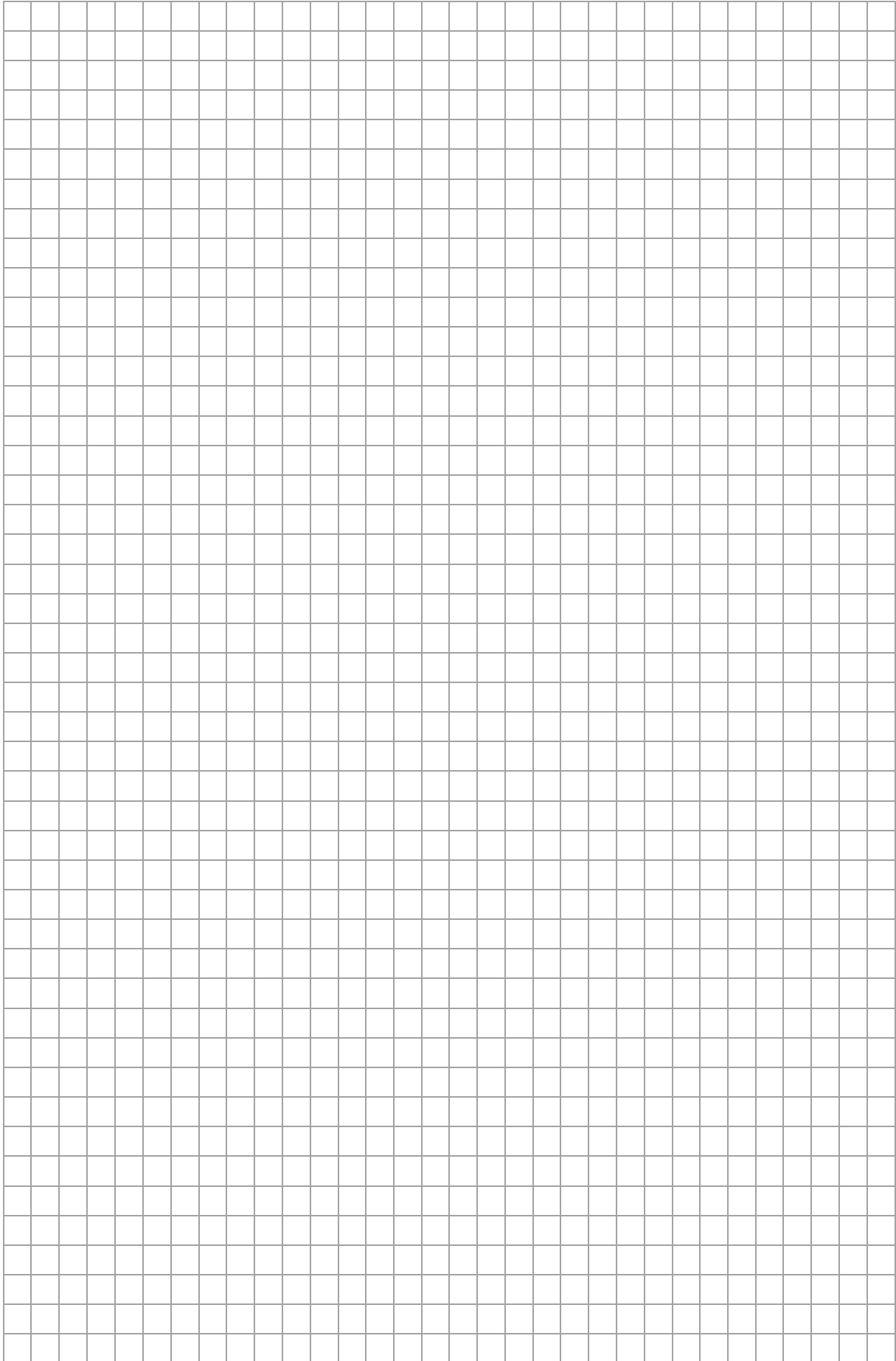
Oblicz współrzędne punktu  $C$ . Rozważ wszystkie przypadki.

Zapisz obliczenia.







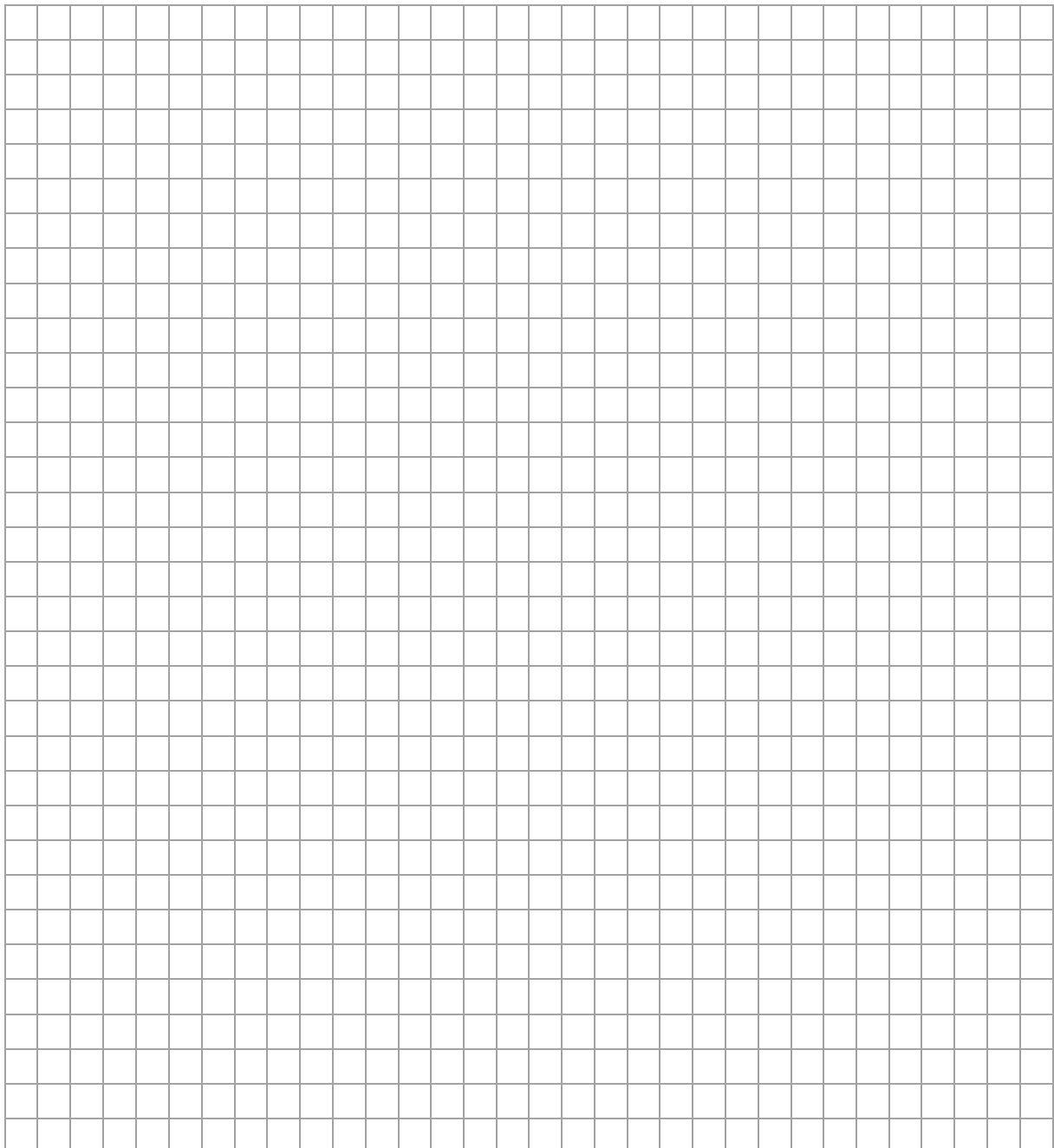


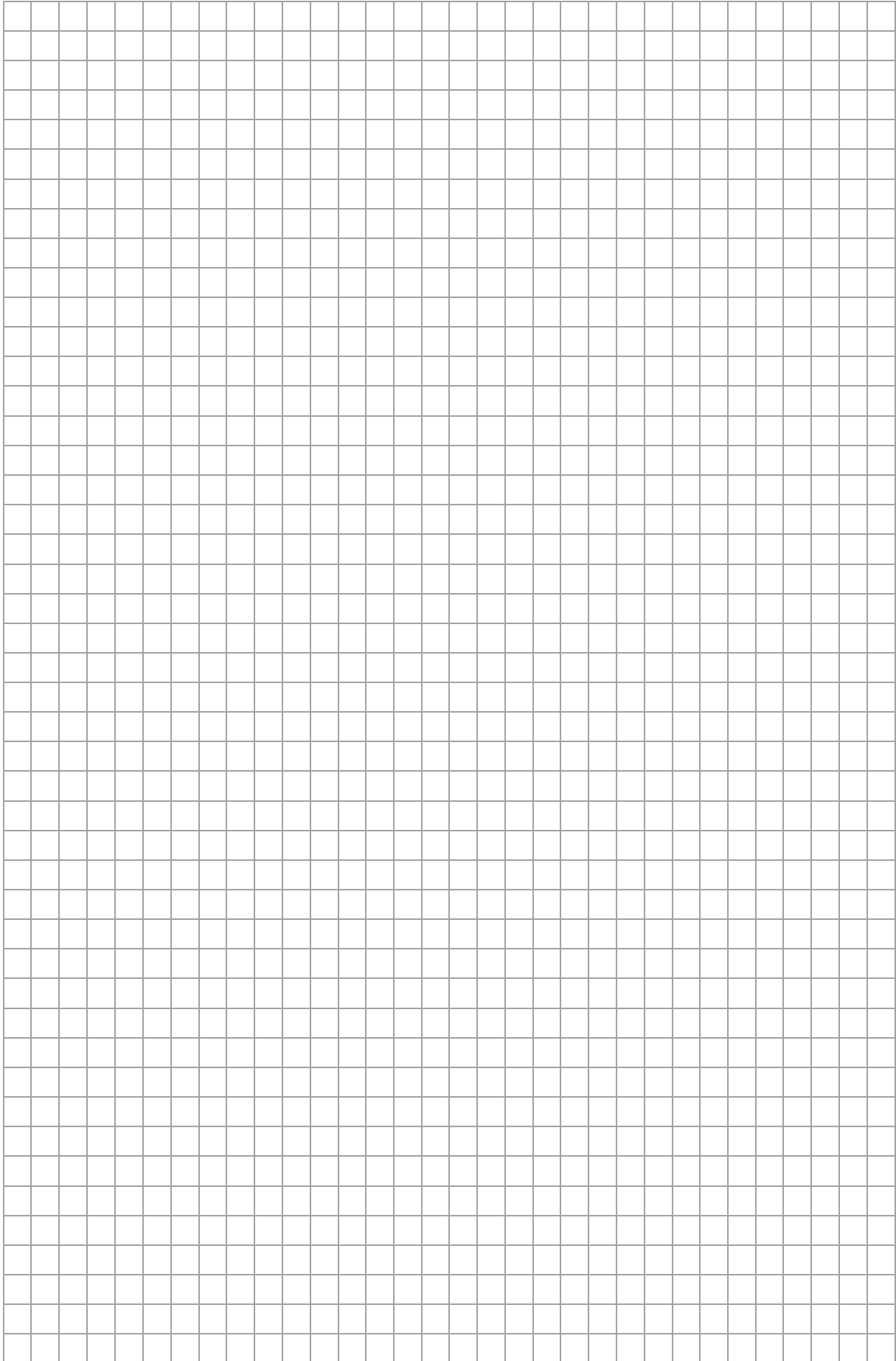
### Zadanie 8. (0–4)

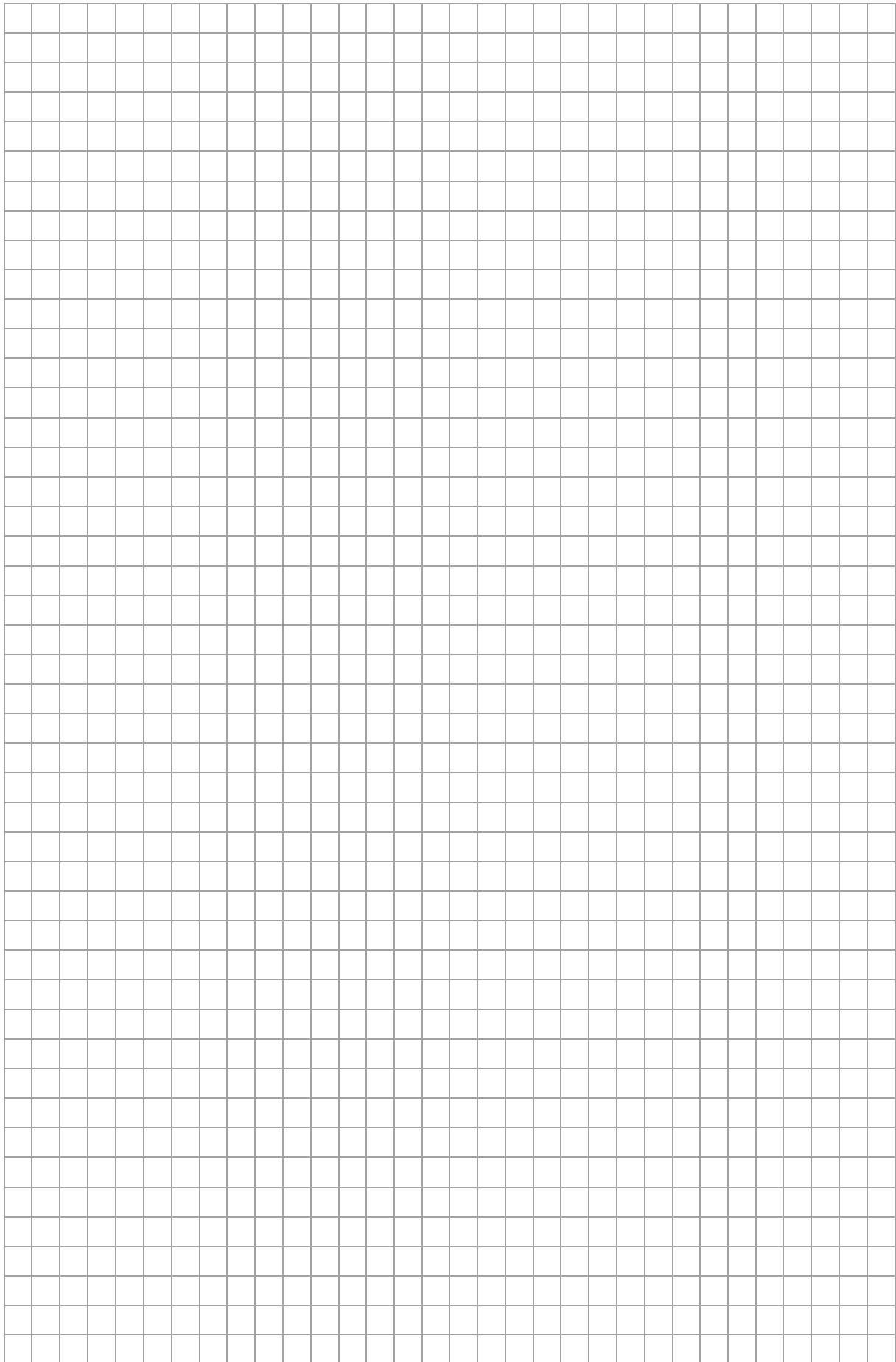
Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1)}{\binom{n}{2}}$$

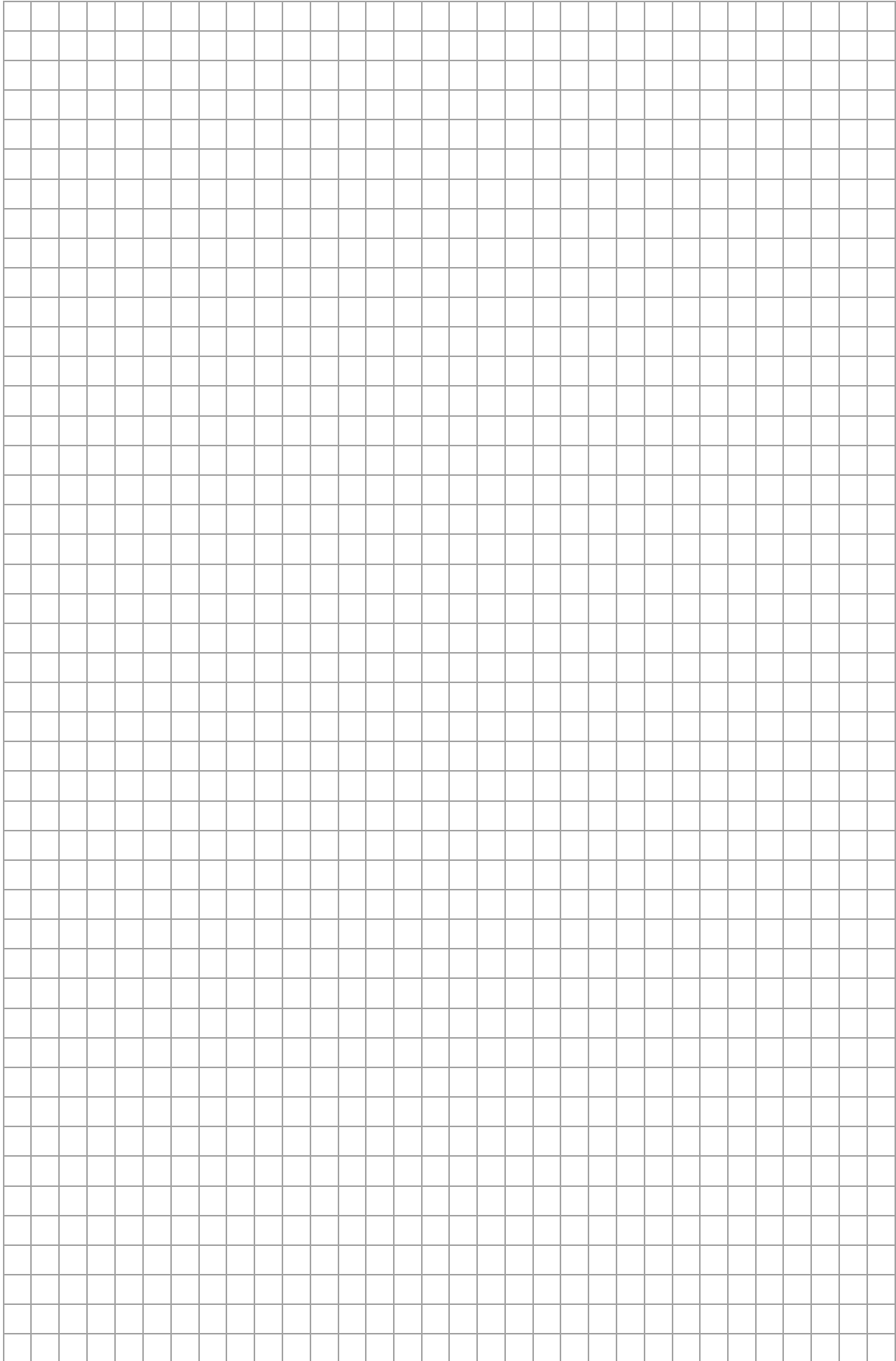
gdzie  $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1)$  jest sumą kolejnych liczb naturalnych nieparzystych. Zapisz obliczenia.









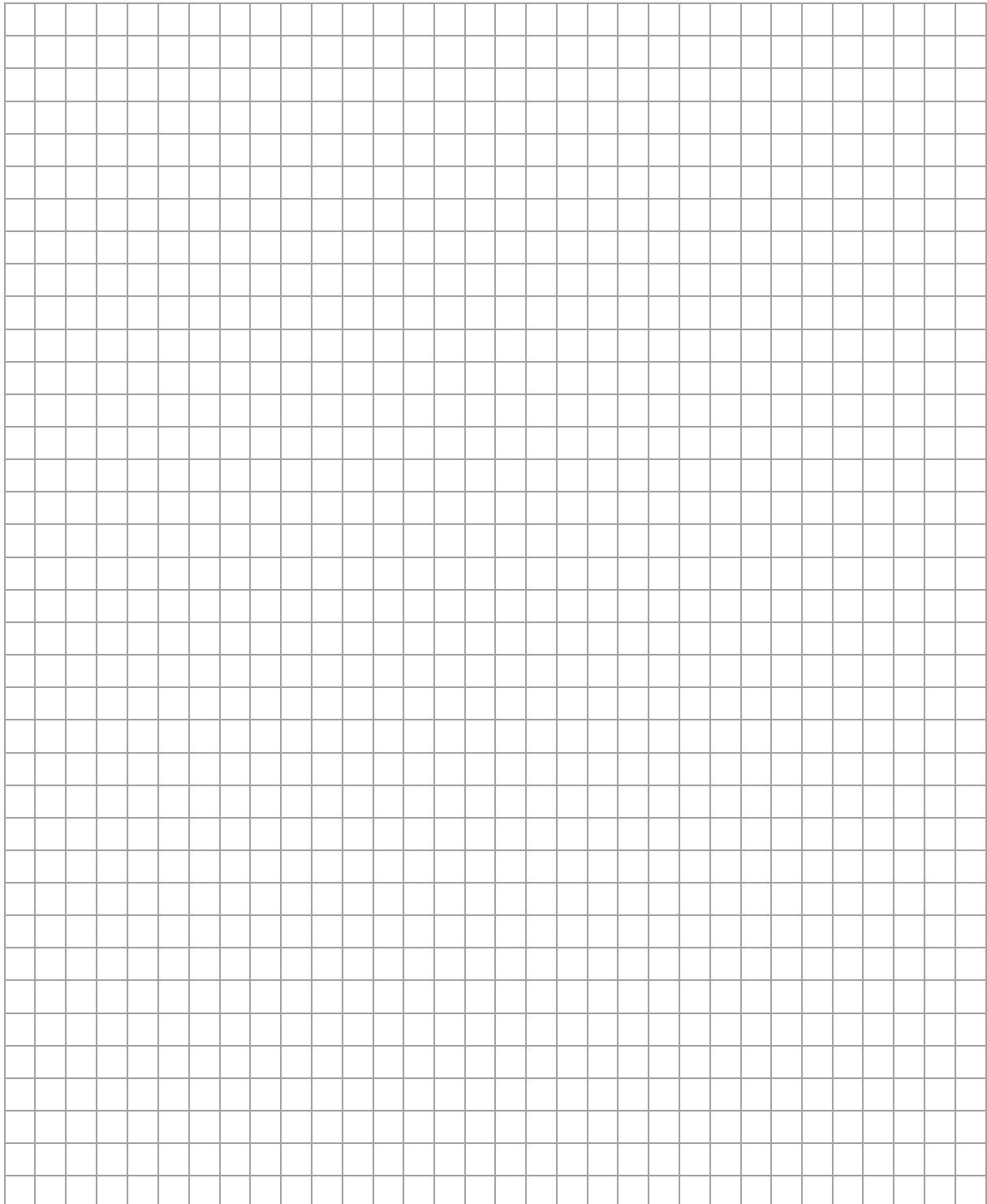


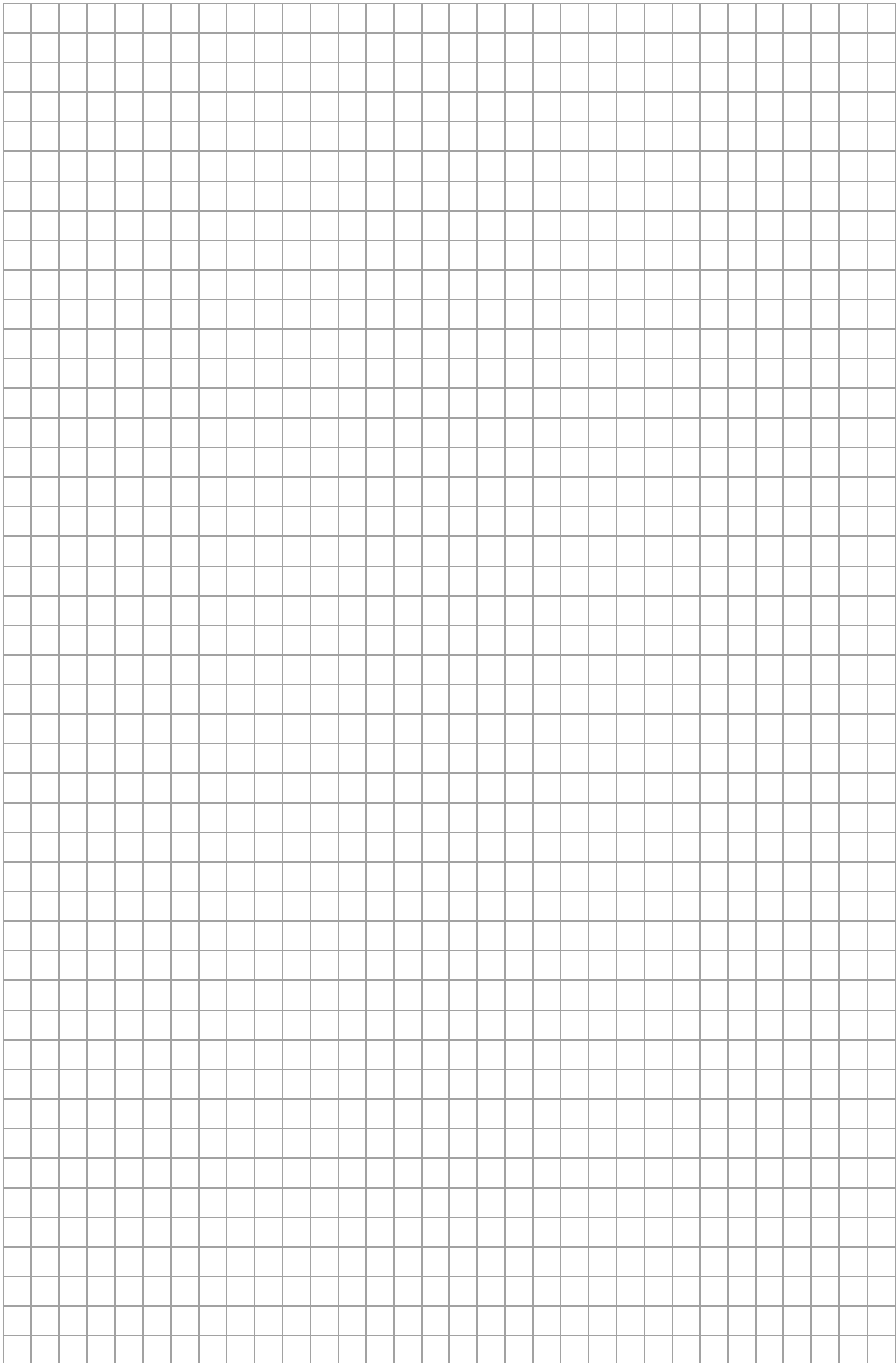
**Zadanie 9. (0–4)**

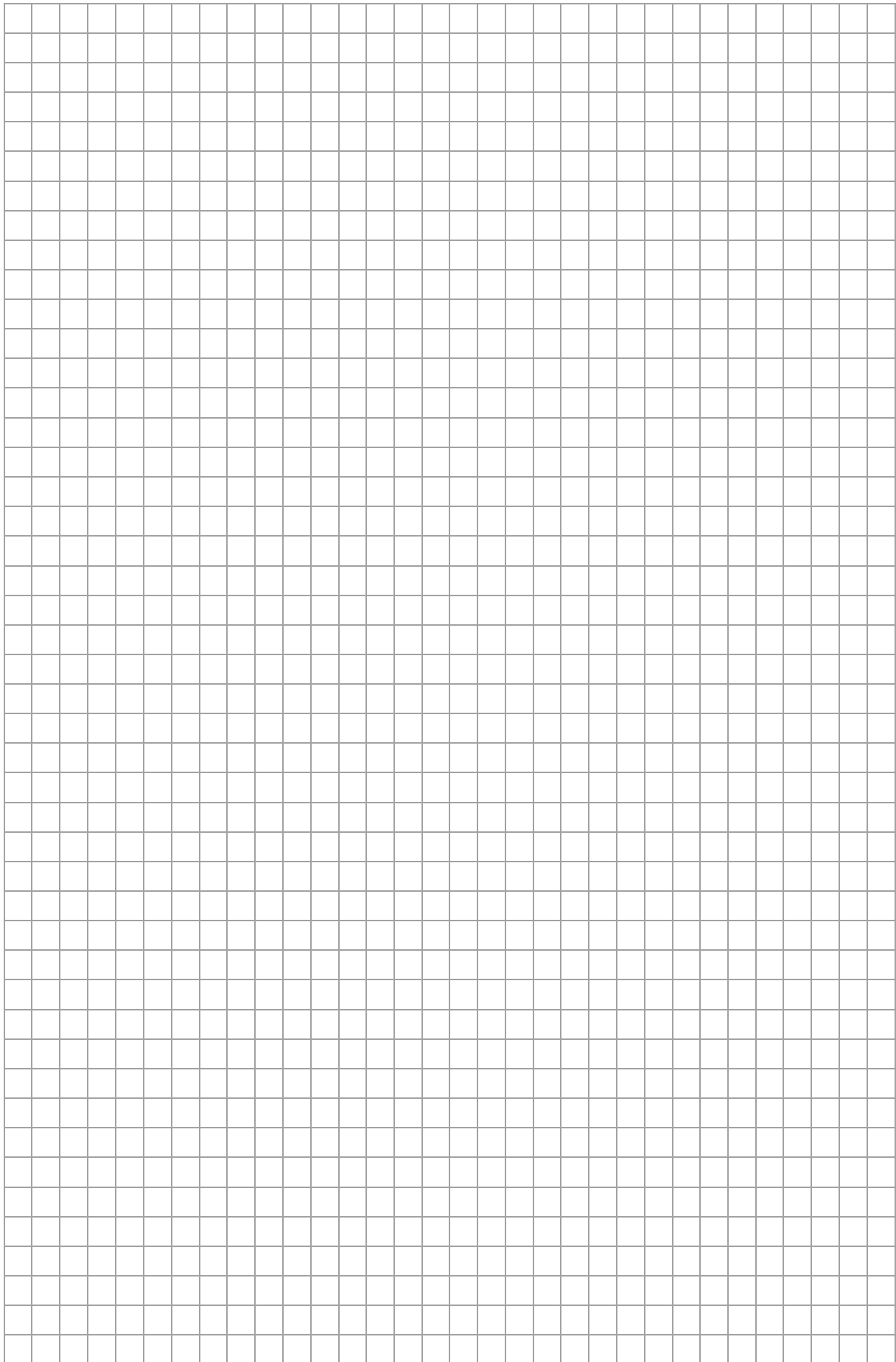
Rozwiąż równanie

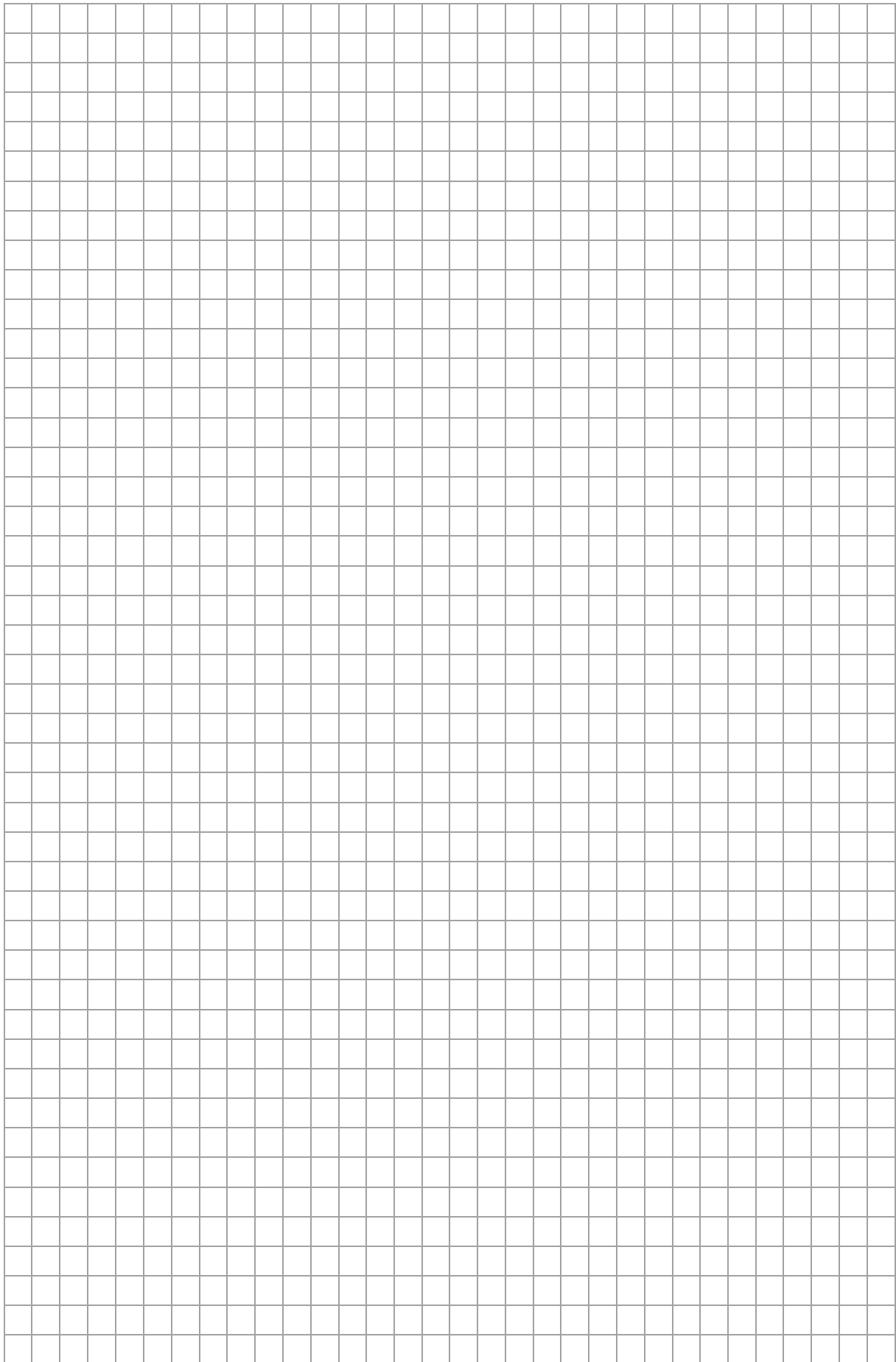
$$\sin^4 x = \sin x \cdot \cos x - \cos^4 x$$

w zbiorze  $[-\pi, 2\pi]$ . Zapisz obliczenia.

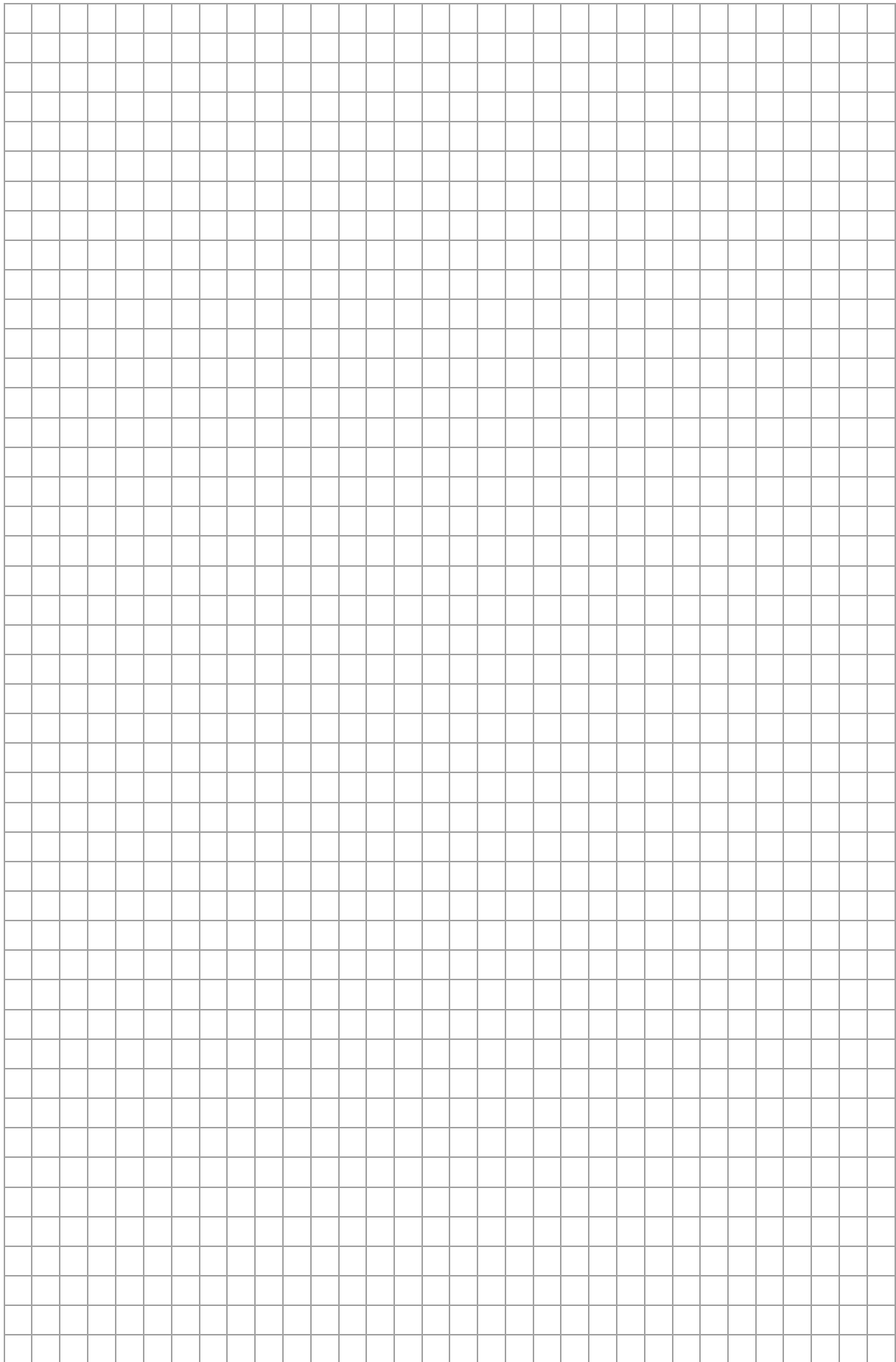


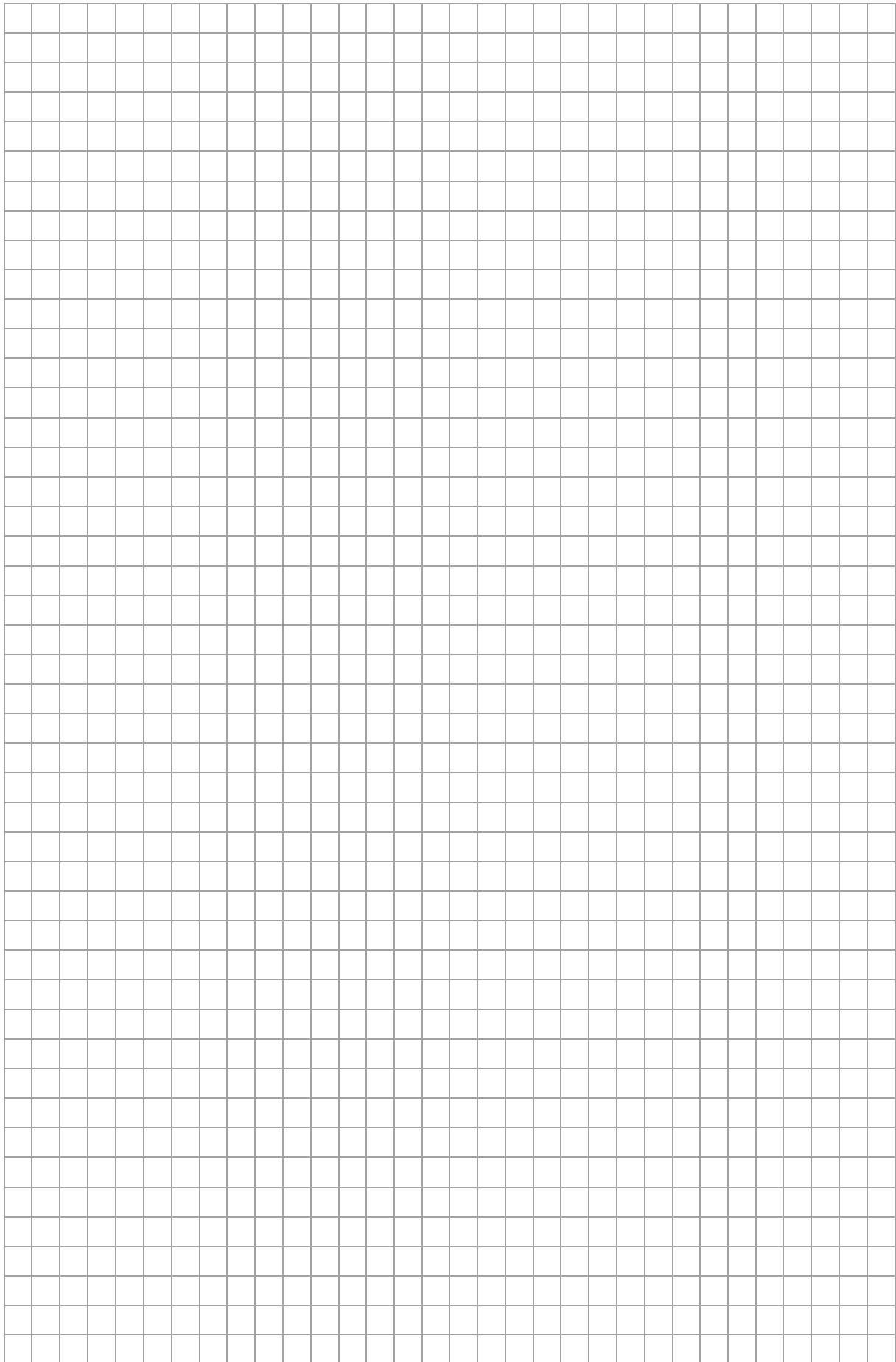




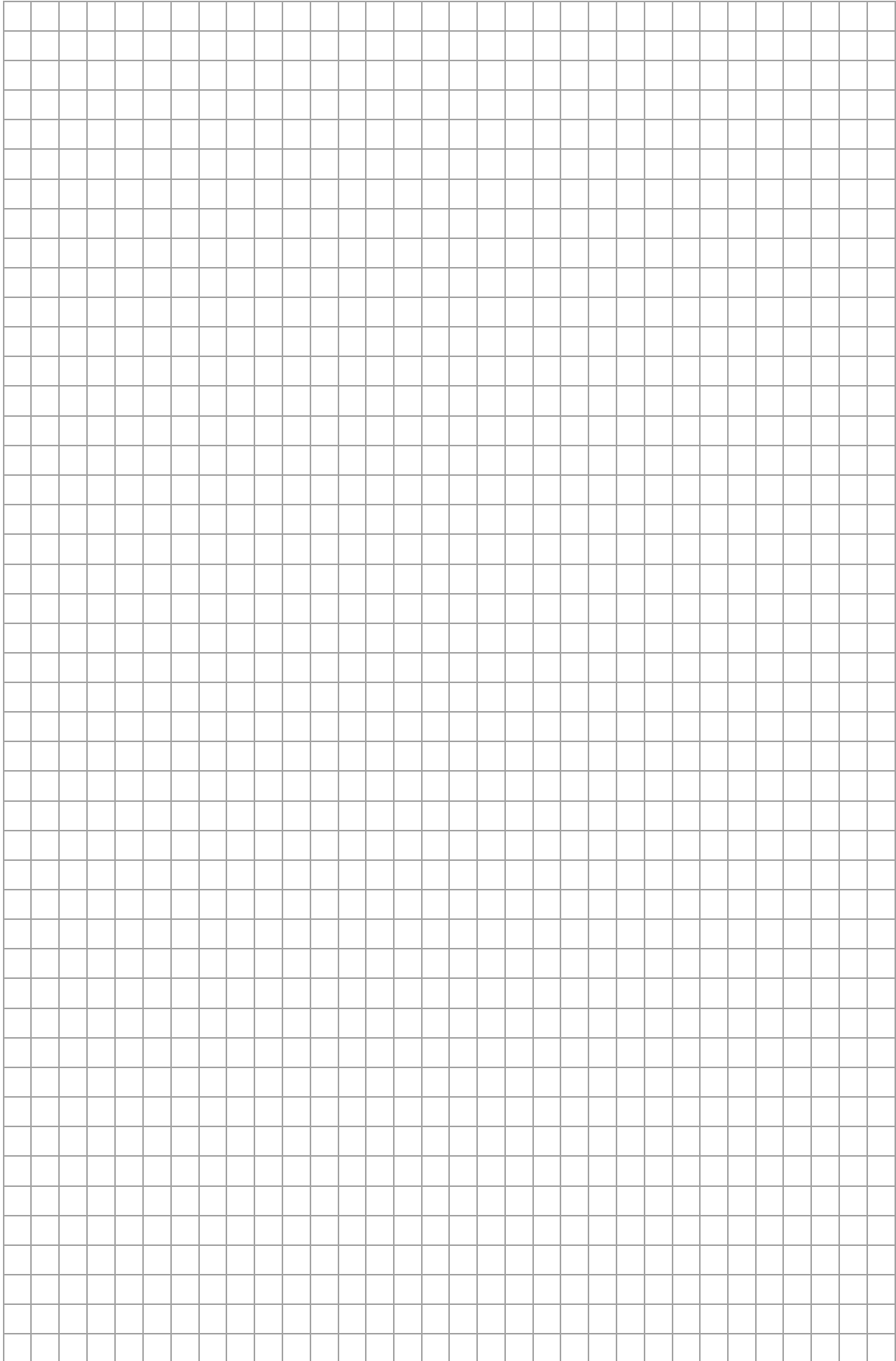










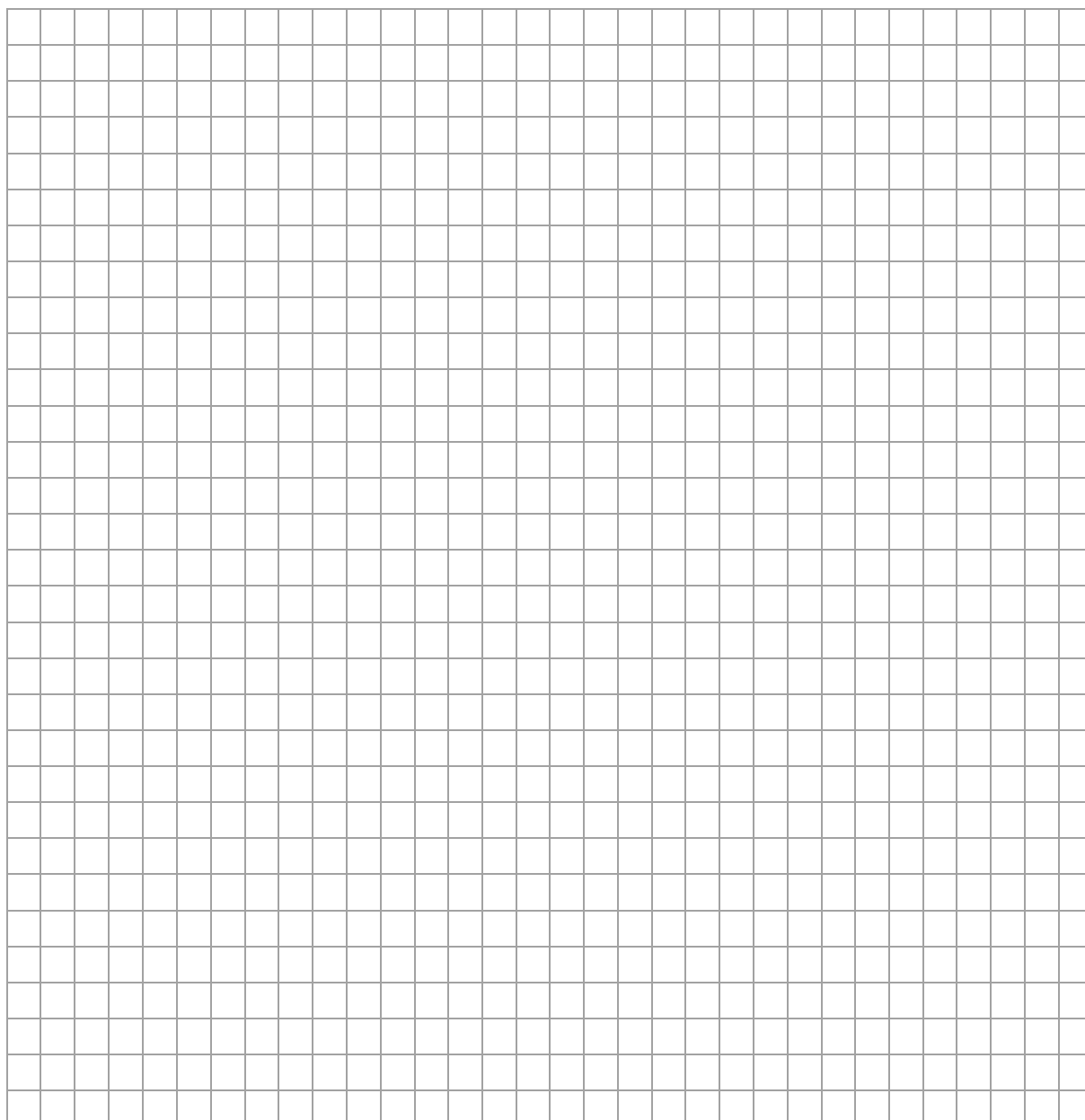


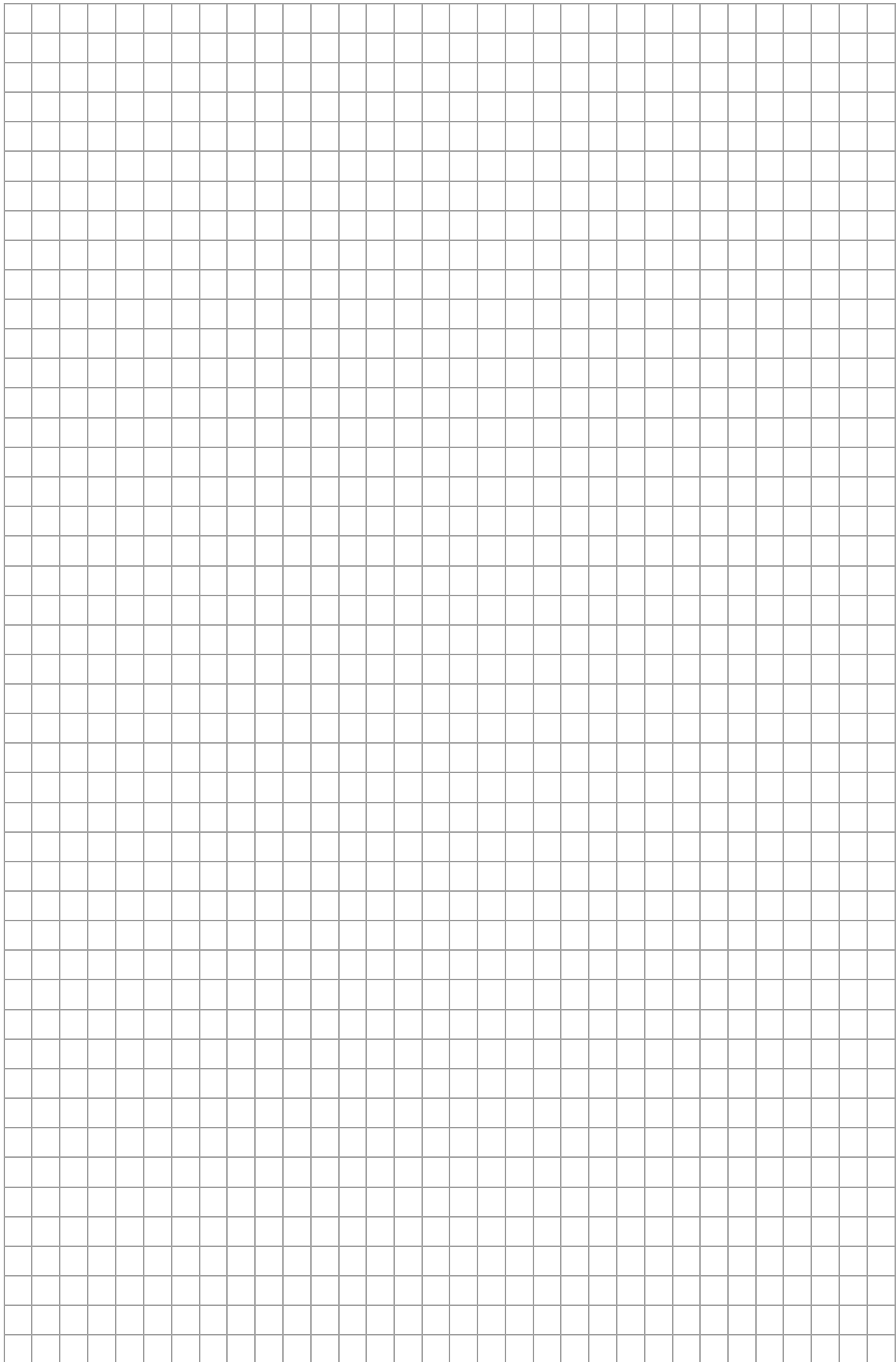
### Zadanie 11. (0–5)

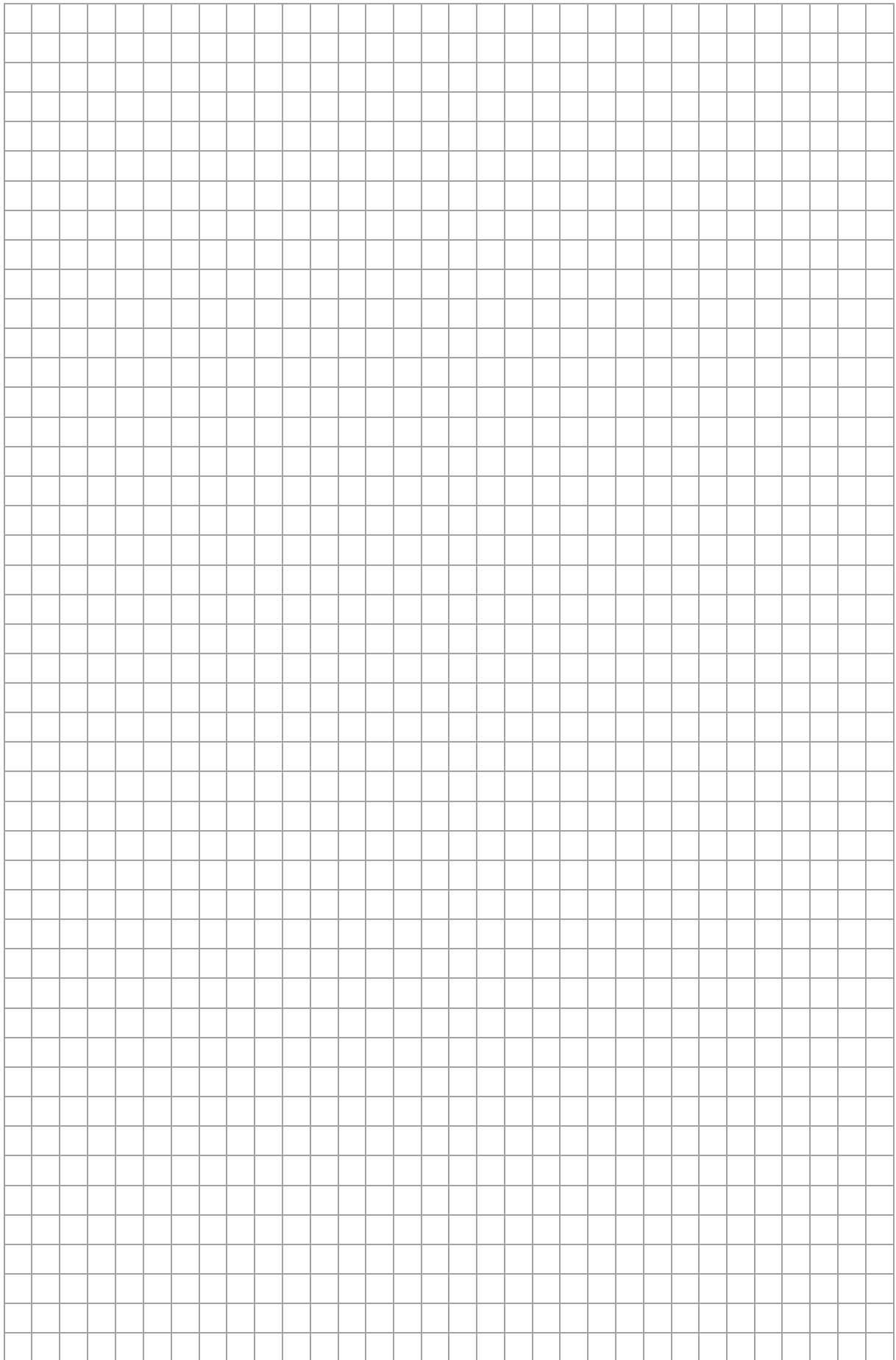
Funkcja kwadratowa  $f$  zmiennej rzeczywistej  $x$  jest określona wzorem

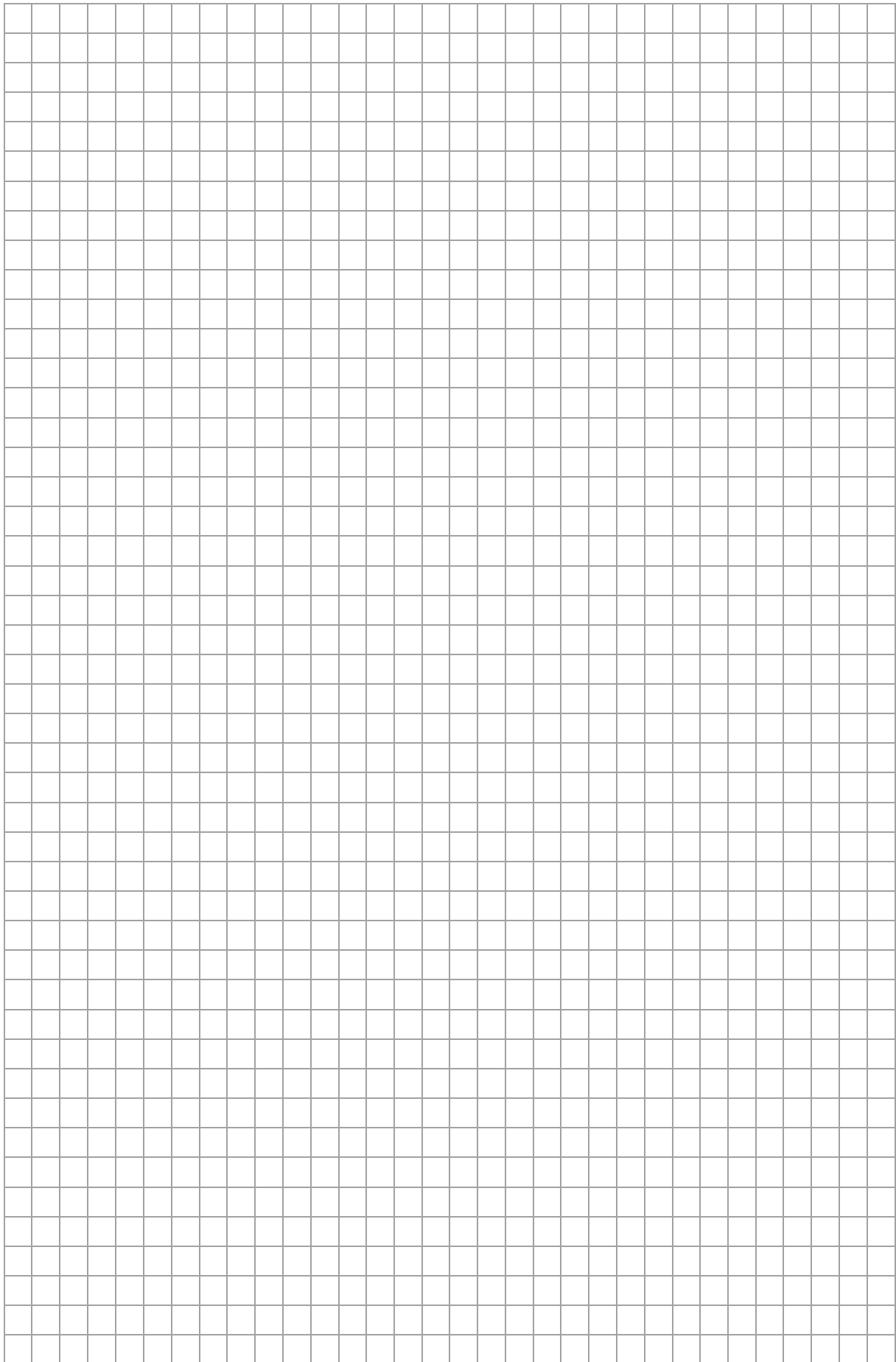
$$f(x) = x^2 - 3x - m^2 + m + 3$$

Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których funkcja  $f$  ma dwa różne miejsca zerowe  $x_1, x_2$  spełniające warunek  $|x_1^2 - x_2^2| \leq 12$ . Zapisz obliczenia.



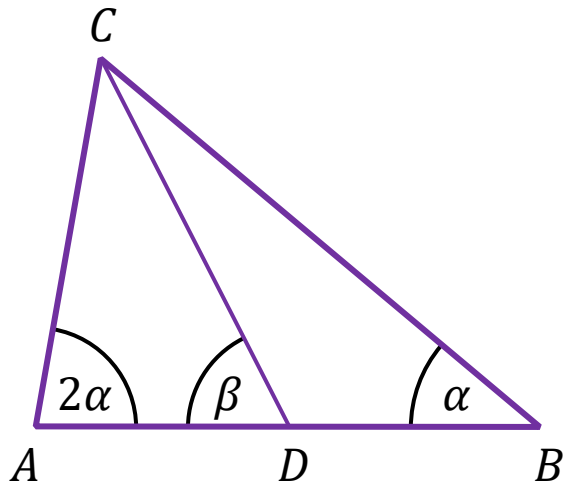




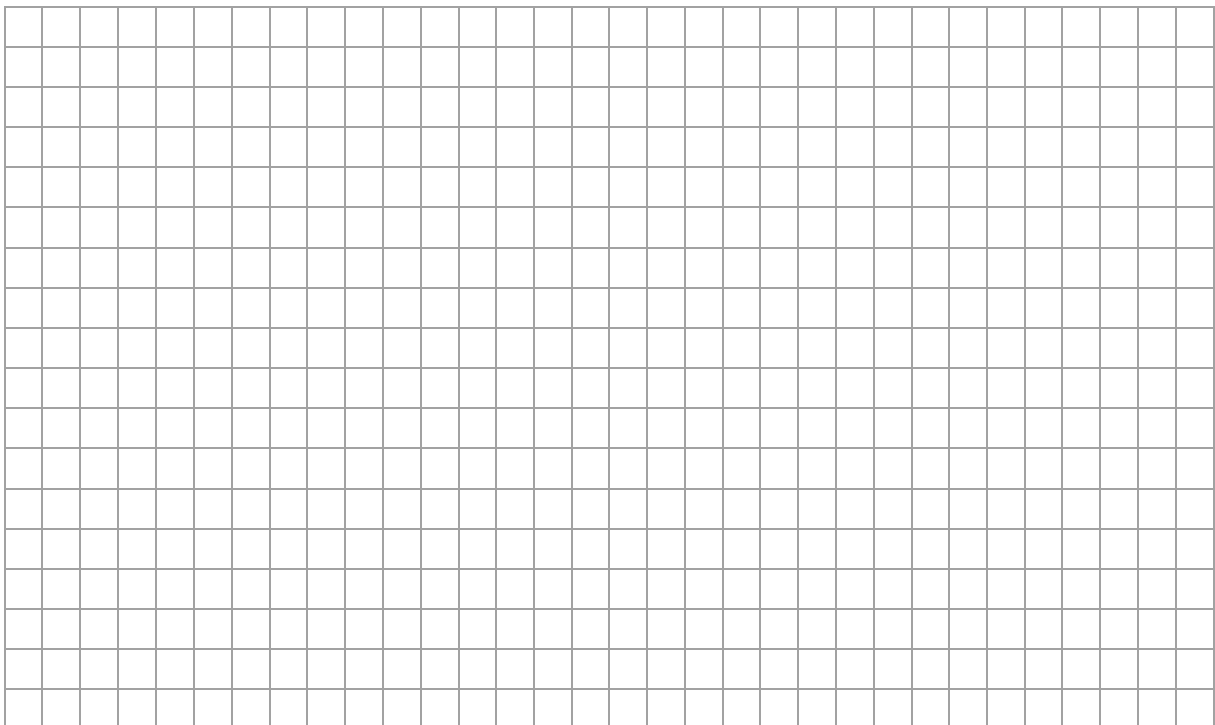


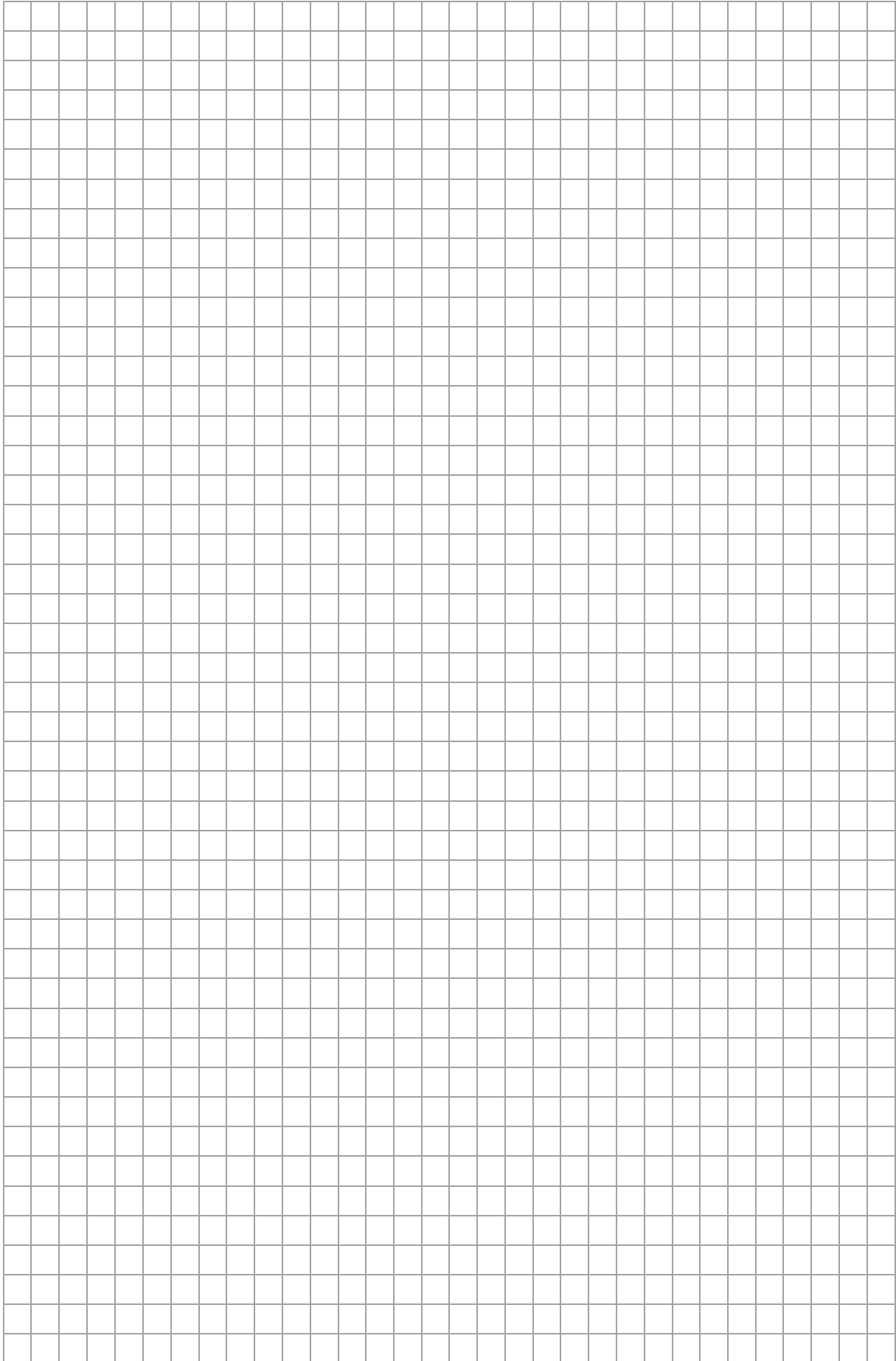
**Zadanie 12. (0–5)**

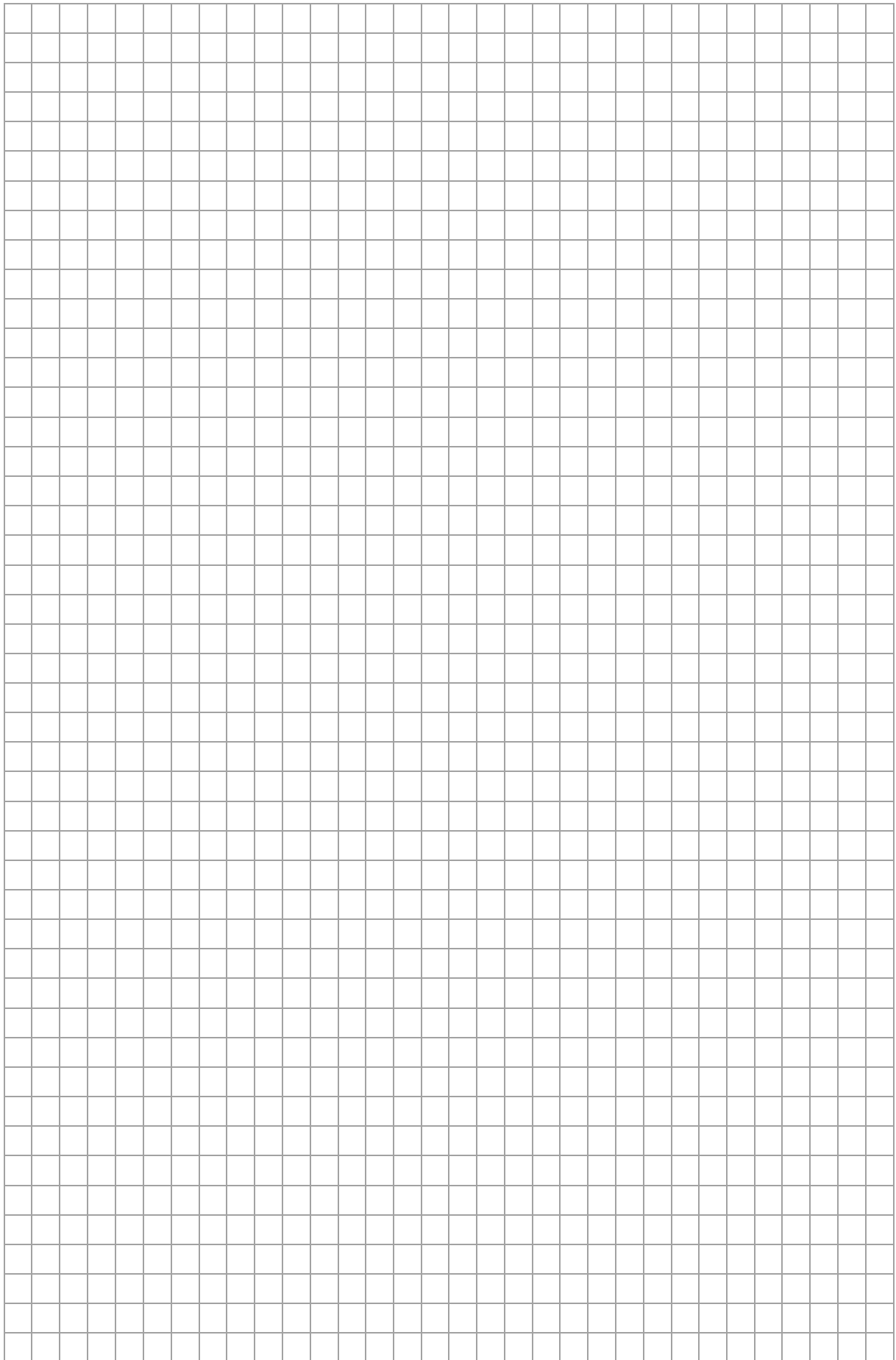
W trójkącie ostrokątnym  $ABC$  miara kąta  $BAC$  jest dwa razy większa od miary kąta  $ABC$ . Punkt  $D$  jest środkiem boku  $AB$ . Niech  $\alpha$  oznacza miarę kąta  $ABC$ , natomiast  $\beta$  – miarę kąta  $ADC$  (zobacz rysunek).



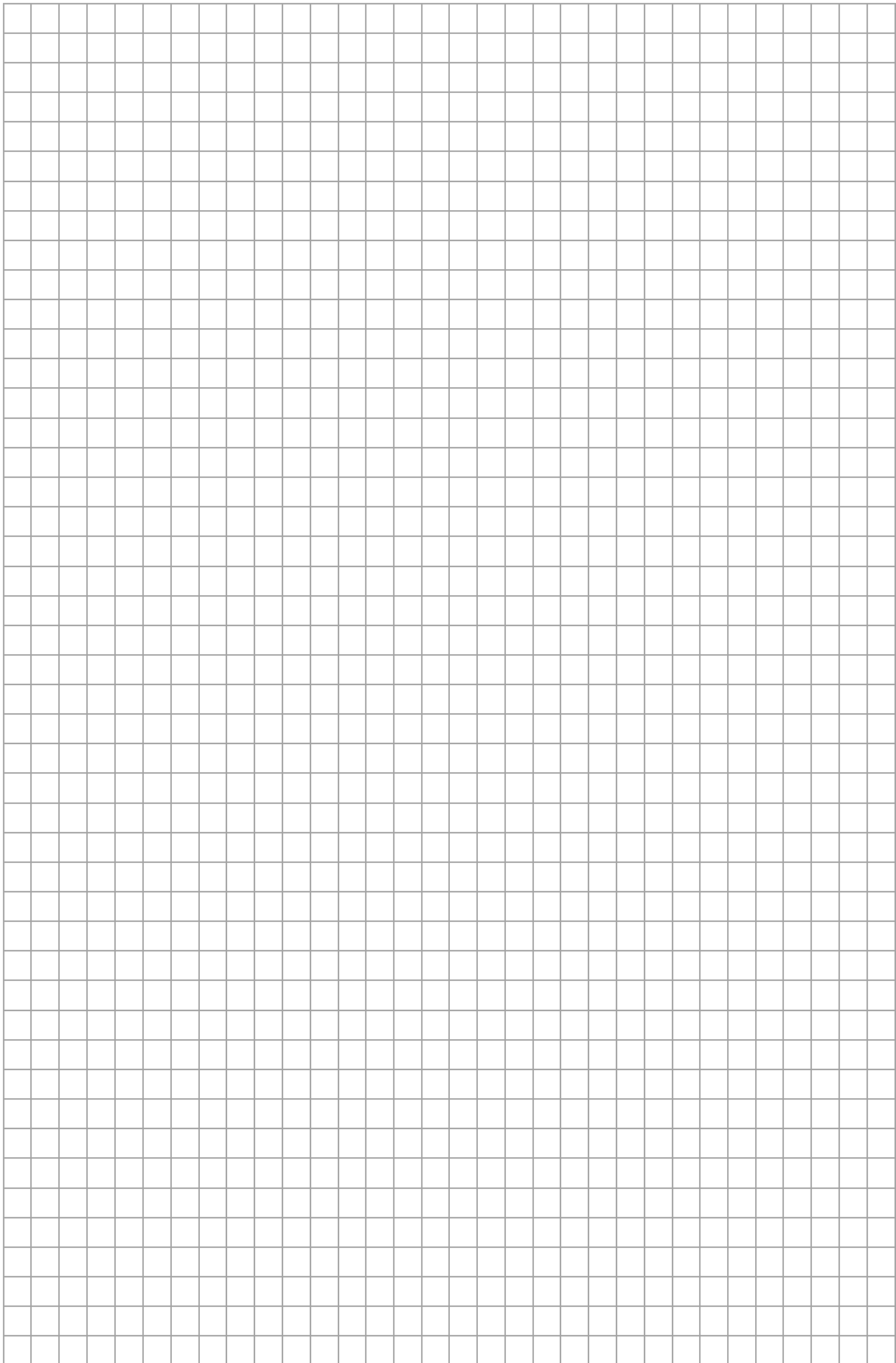
Oblicz  $\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin(2\alpha)}$ . Zapisz obliczenia.

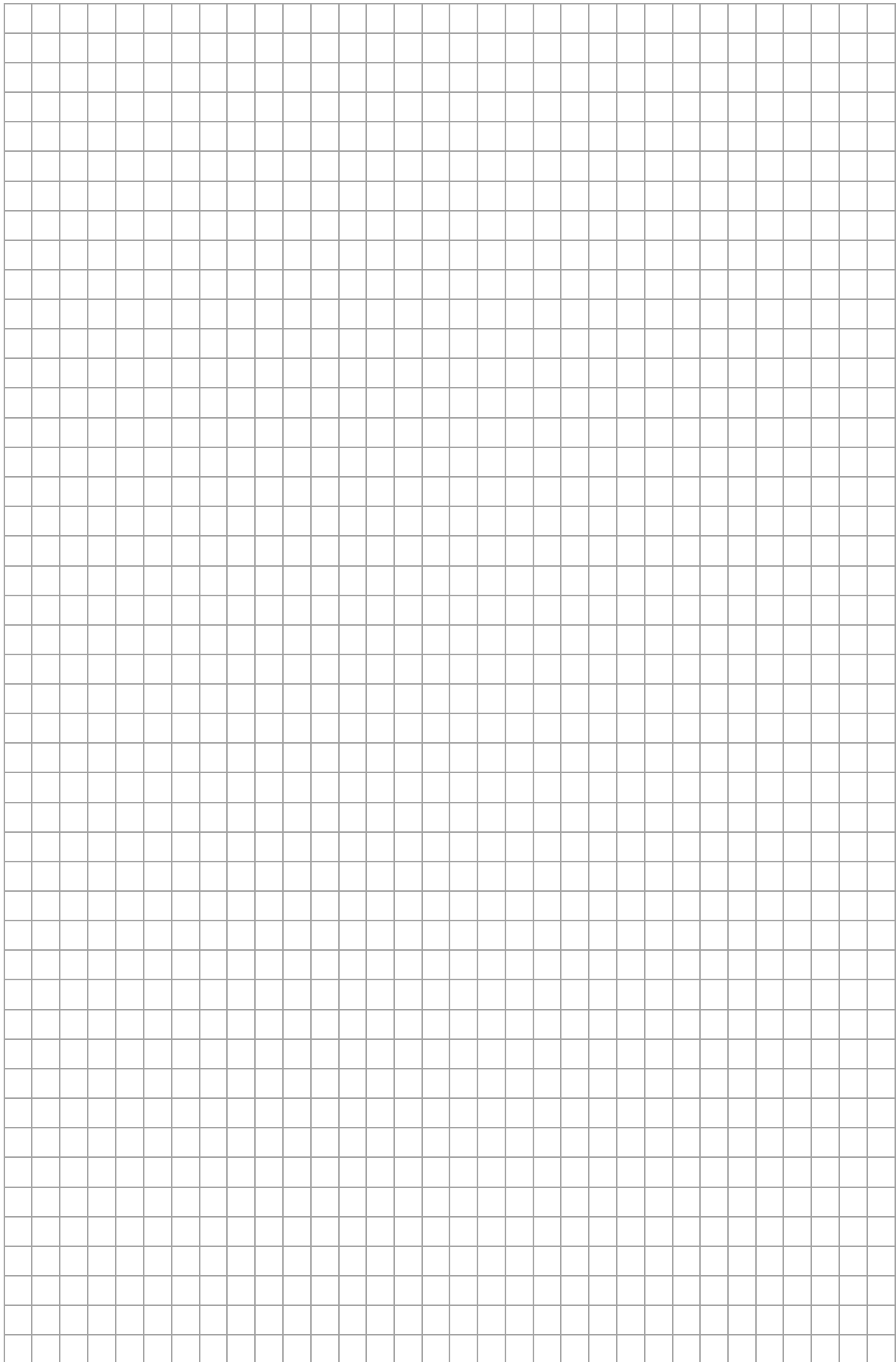


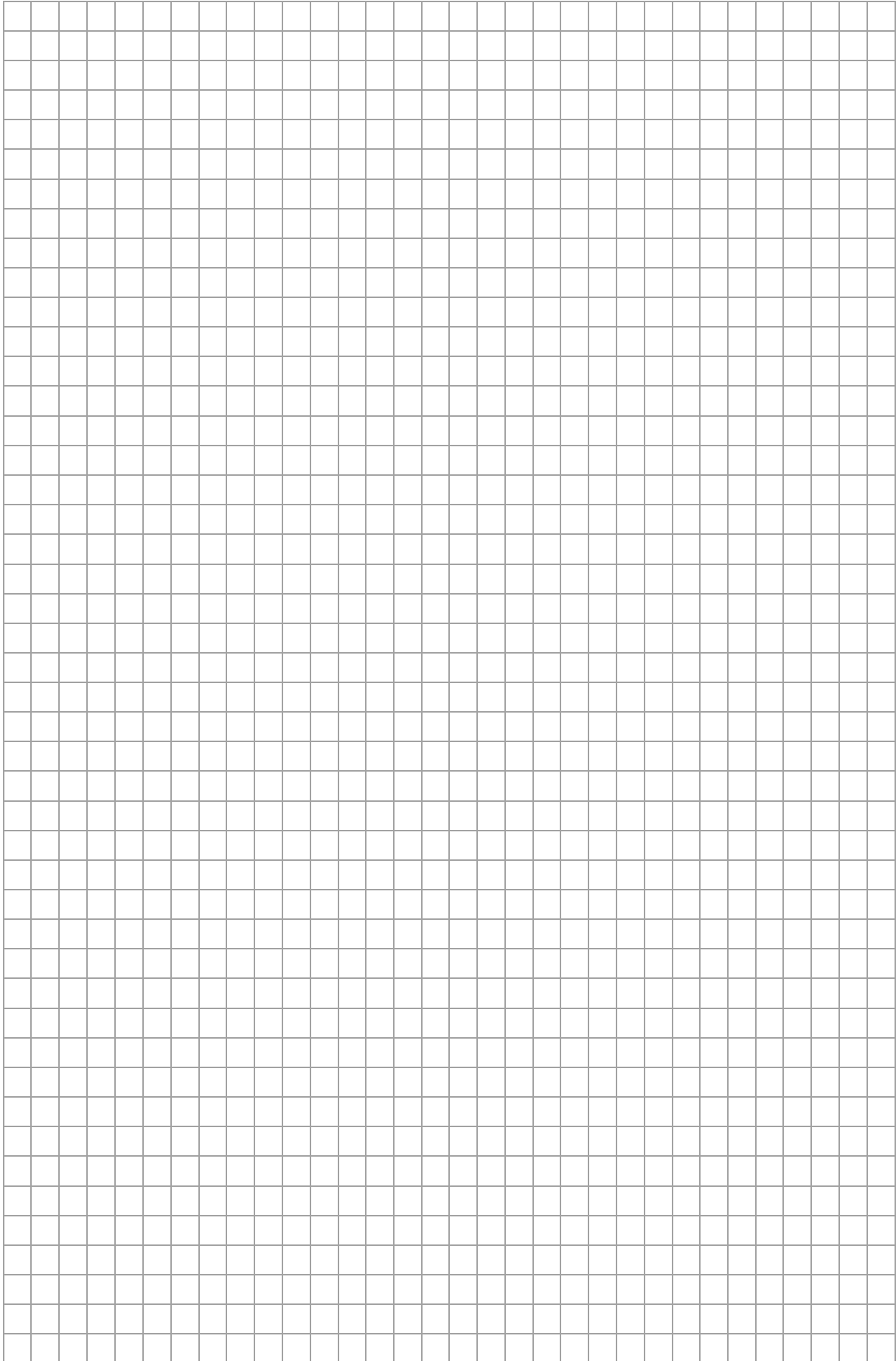












### Zadanie 13.

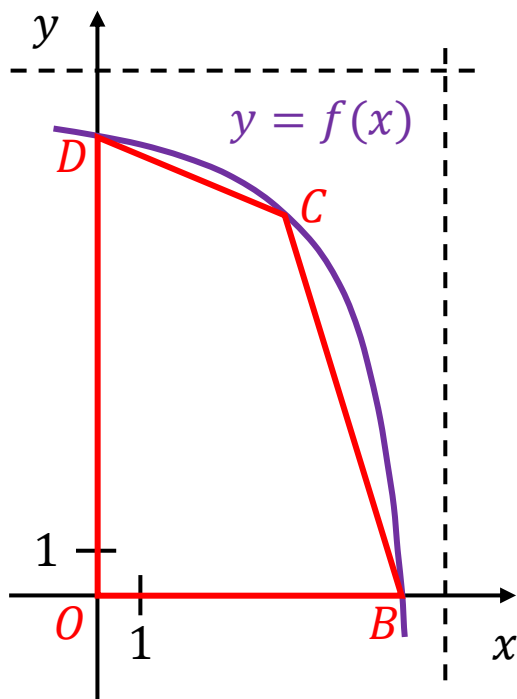
Funkcja  $f$  jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{12x - 84}{x - 8}$$

dla każdego  $x \in (-\infty, 8)$ . W kartezjańskim układzie współrzędnych  $(x, y)$  rozważamy wszystkie czworokąty  $OBCD$ , w których:

- wierzchołek  $O$  ma współrzędne  $(0, 0)$
- wierzchołki  $B$  oraz  $D$  są punktami przecięcia wykresu funkcji  $f$  z osią – odpowiednio –  $Ox$  i  $Oy$
- wierzchołek  $C$  ma obie współrzędne dodatnie i leży na wykresie funkcji  $f$

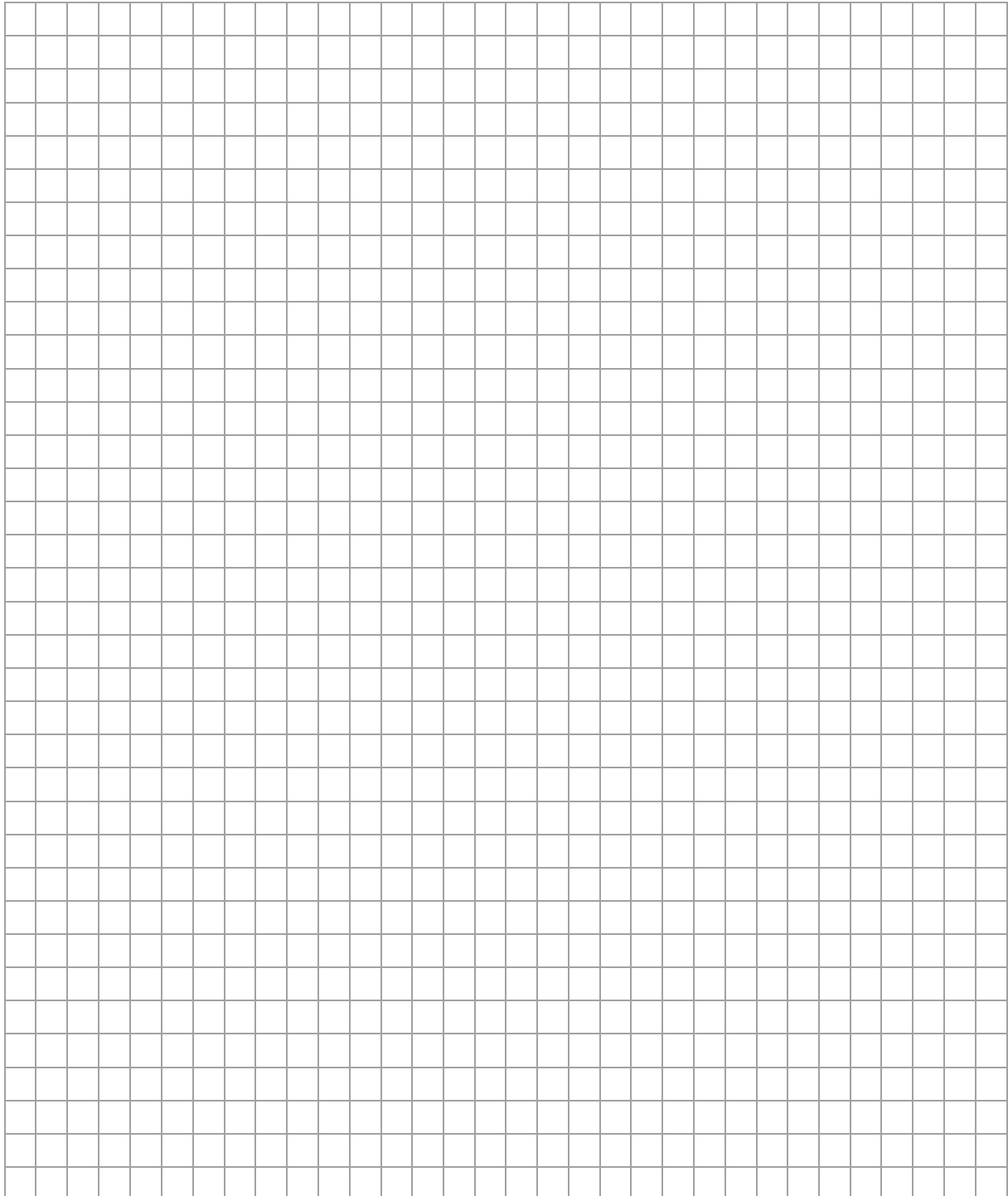
(zobacz rysunek).

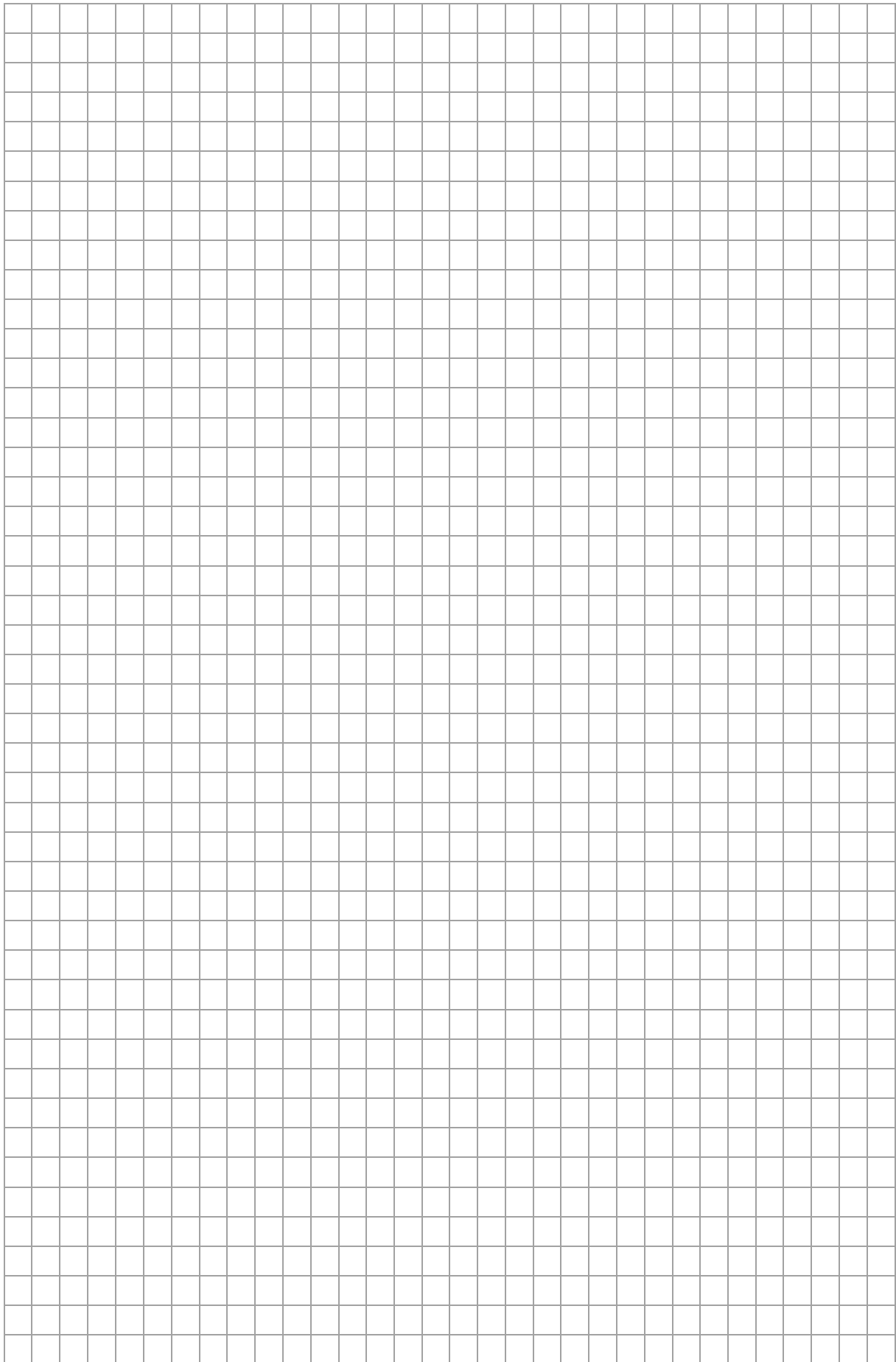


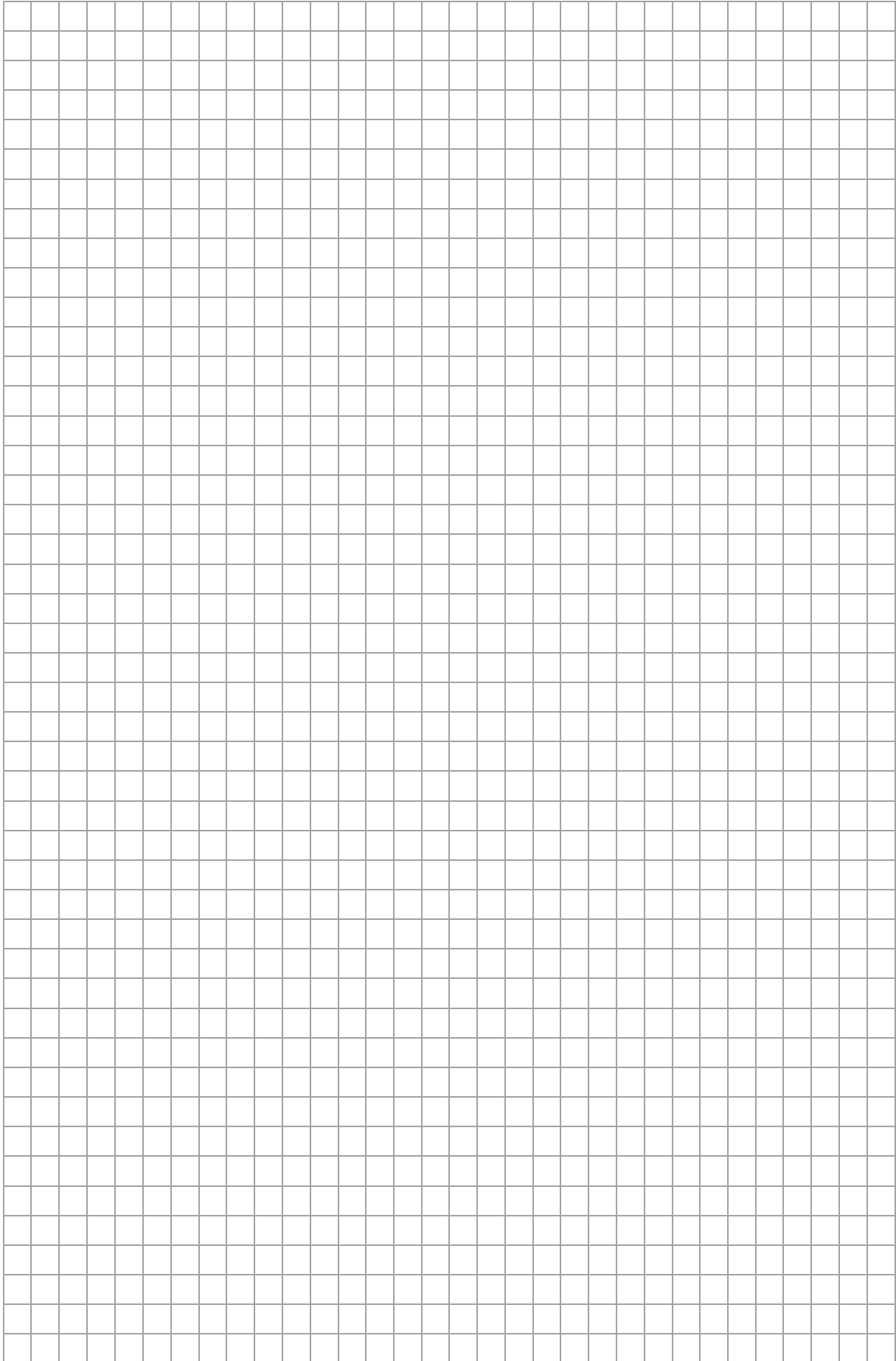
**Zadanie 13.1. (0–2)**

Wykaż, że pole  $P$  czworokąta  $OBCD$  w zależności od pierwszej współrzędnej  $x$  punktu  $C$  jest określone wzorem

$$P(x) = \frac{21}{4} \cdot \frac{x^2 - 56}{x - 8}$$







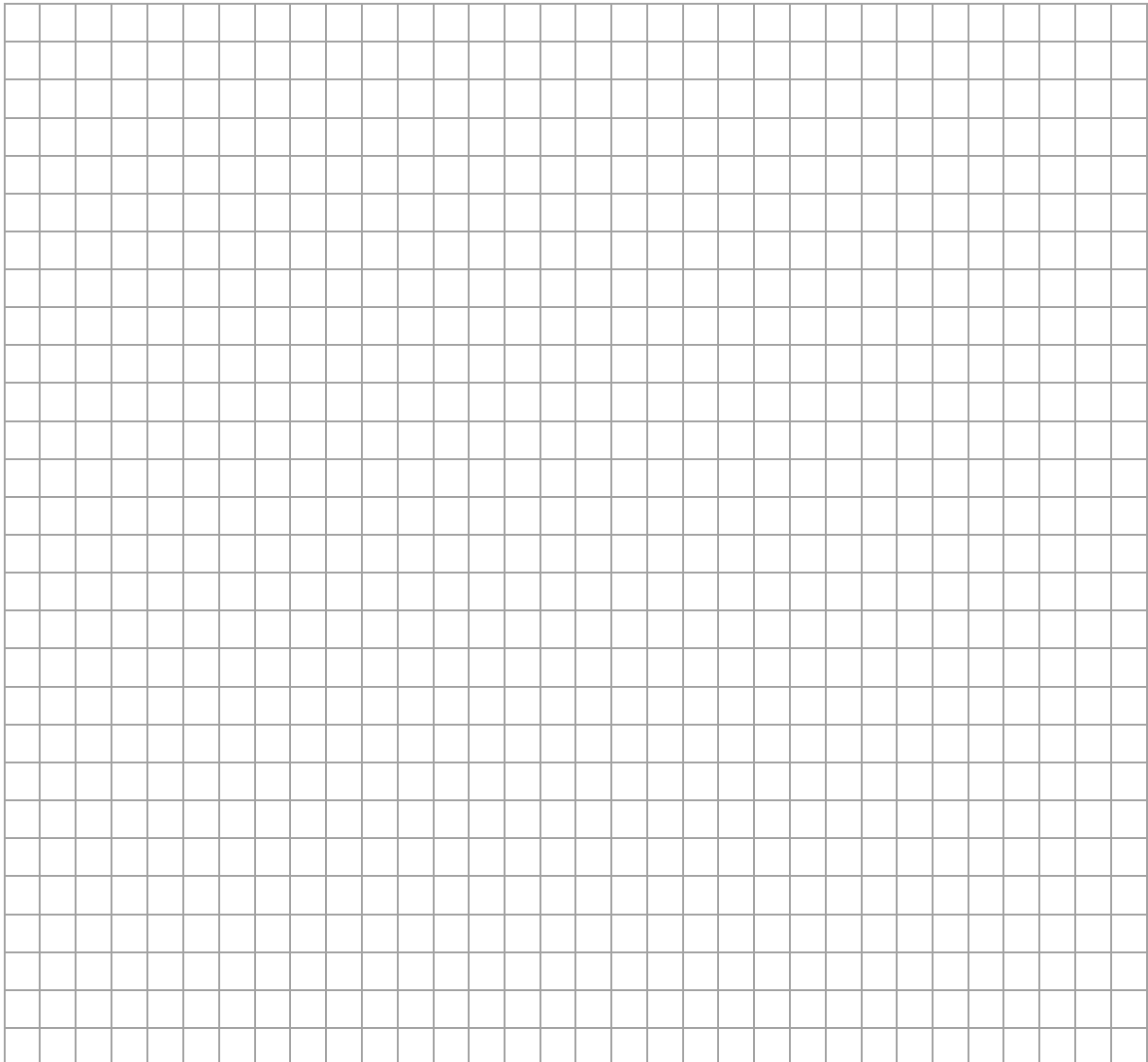
**Zadanie 13.2. (0–4)**

Pole  $P$  czworokąta  $OBCD$  w zależności od pierwszej współrzędnej  $x$  punktu  $C$  jest określone wzorem

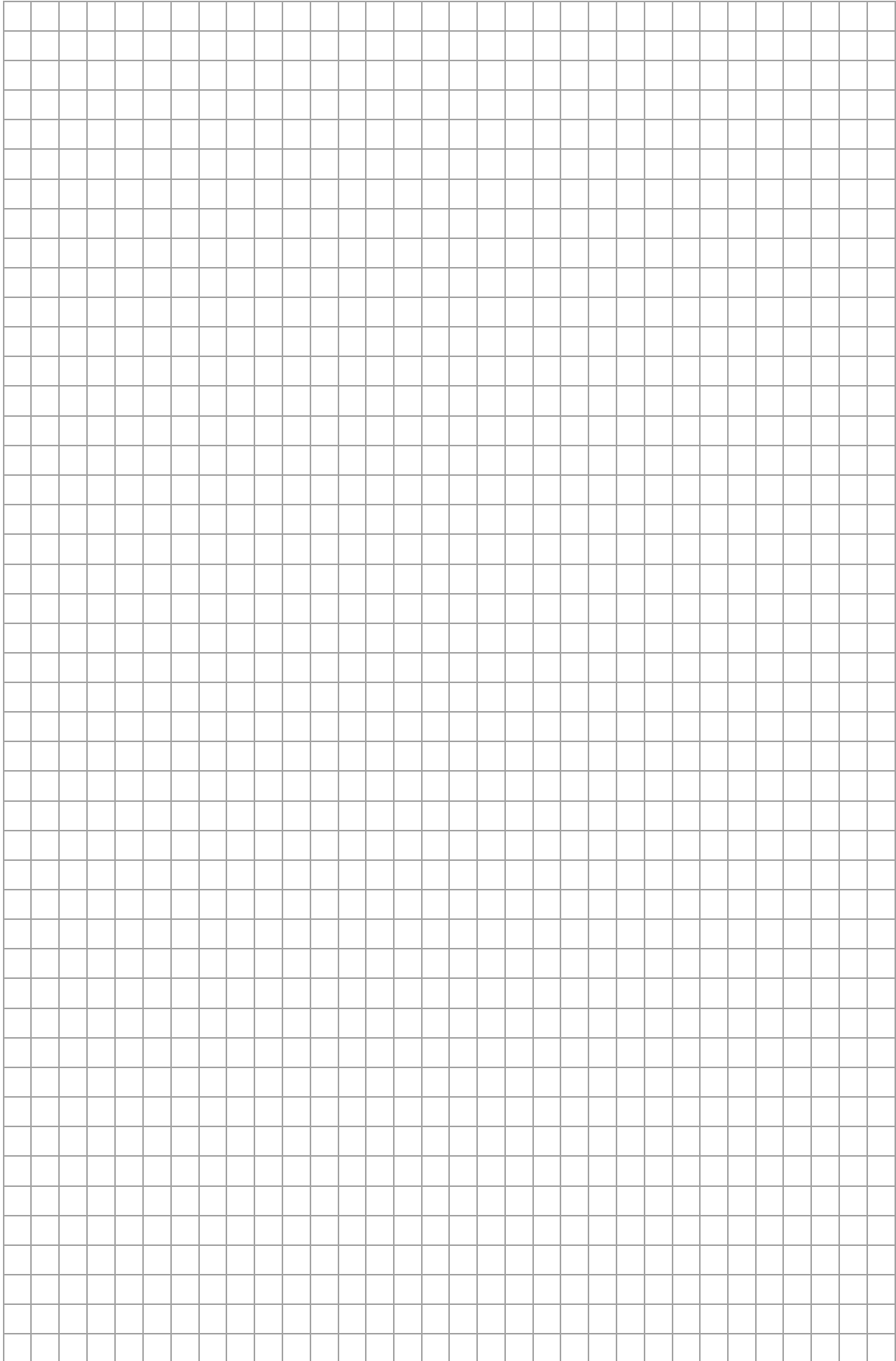
$$P(x) = \frac{21}{4} \cdot \frac{x^2 - 56}{x - 8}$$

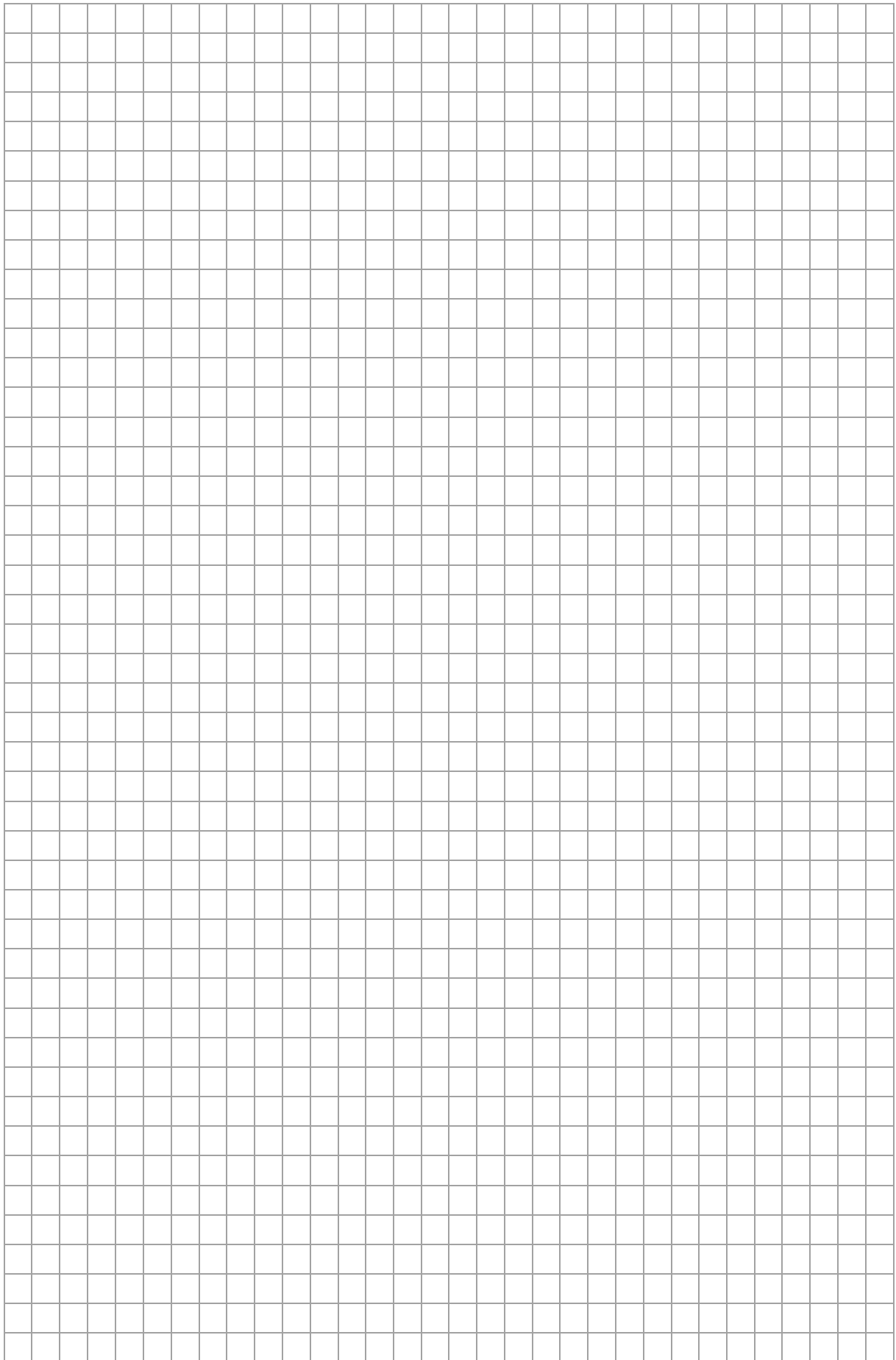
dla  $x \in (0, 7)$ .

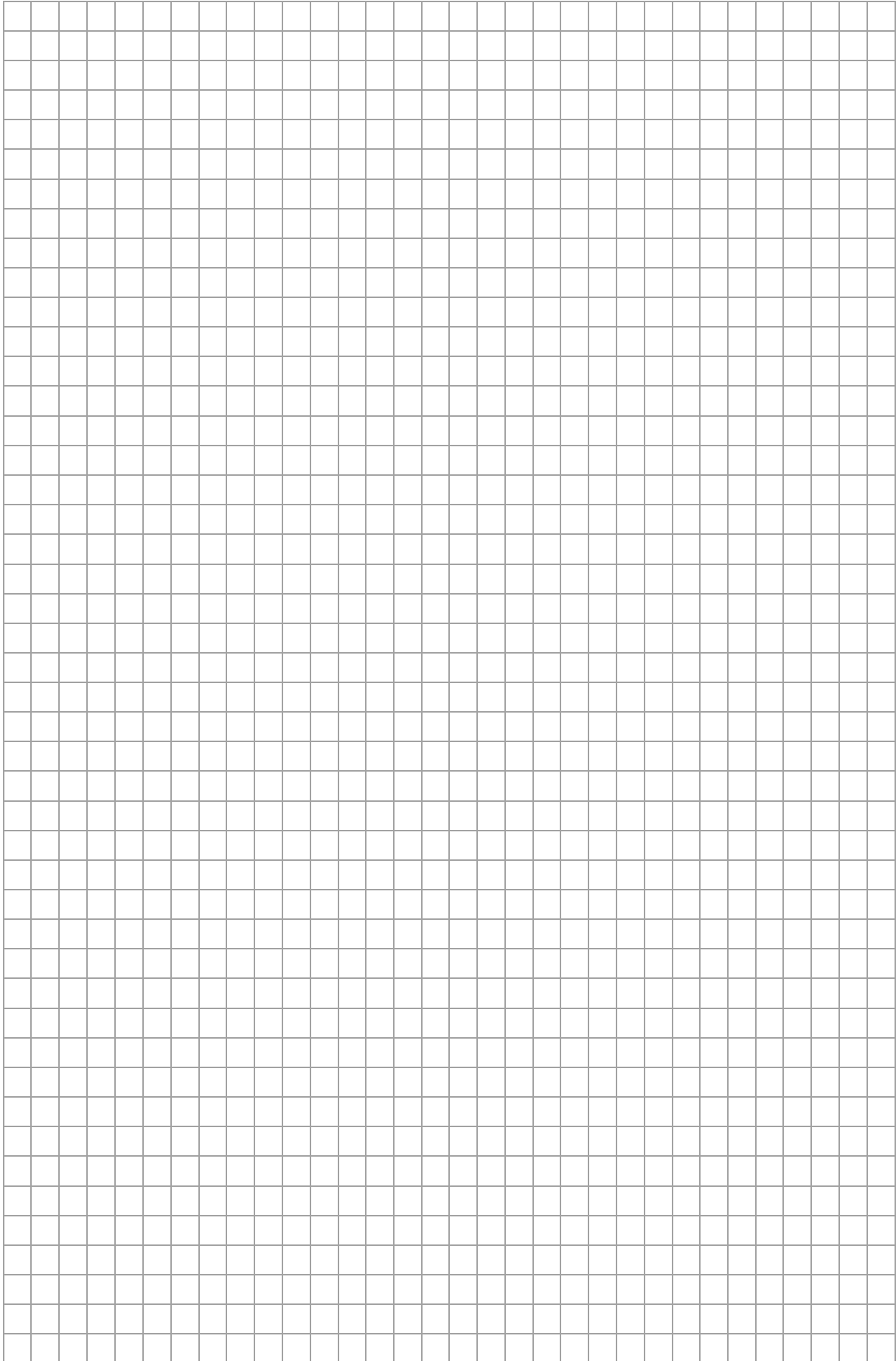
Oblicz współrzędne wierzchołka  $C$ , dla których pole czworokąta  $OBCD$  jest największe. Zapisz obliczenia.



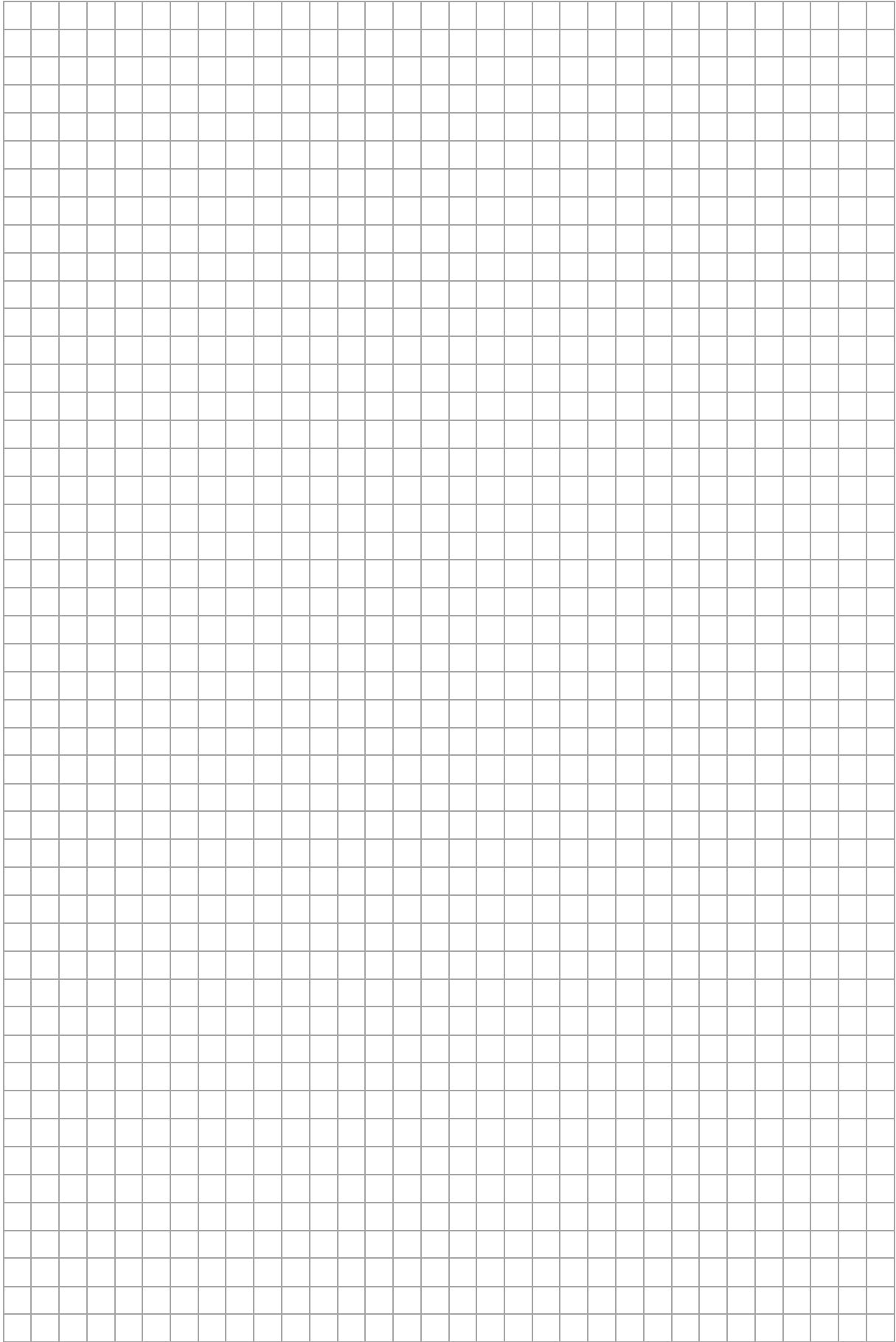
















# MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

*Formuła 2023*



# MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

*Formuła 2023*



# MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

*Formuła 2023*

