CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom rozszerzony**
Formy arkusza:	EMAP-R0-100-2205, EMAP-R0-200-2205, EMAP-R0-300-2205, EMAP-R0-400-2205, EMAP-R0-600-2205, EMAP-R0-700-2205, EMAP-R0-Q00-2205
Termin egzaminu:	11 maja 2022 r.
Data publikacji dokumentu:	28 czerwca 2022 r.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2022[1]	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: R1.2) stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 2. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: R11.2) oblicza pochodne funkcji wymiernych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

[1] Załącznik nr 2 do rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 20 marca 2020 r. w sprawie szczególnych rozwiązań w okresie czasowego ograniczenia funkcjonowania jednostek systemu oświaty w związku z zapobieganiem, przeciwdziałaniem i zwalczaniem COVID-19 (Dz.U. poz. 493, z późn. zm.).

Zadanie 3. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: R6.5) stosuje wzory na sinus […] różnicy kątów […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 4. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymagania ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
I Wykorzystanie i tworzenie informacji. II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: R10.3) korzysta z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

ZADANIE OTWARTE (KODOWANE)

Zadanie 5. (0–2)

Zasady oceniania
2 pkt – odpowiedź całkowicie poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

4	1	1

ZADANIA OTWARTE (NIEKODOWANE)

Uwagi ogólne:
1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 6. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: R2.1) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^3$ oraz $a^3 \pm b^3$.

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy:
- zastosuje wzór na różnicę sześcianów i zapisze nierówność w postaci

  $(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)+2xy(2x-y) \geq 0$ lub

  $(2x-y)(4x^2+2xy+y^2) \geq -2xy(2x-y)$

ALBO
- zastosuje wzór na sześcian różnicy i zapisze nierówność w postaci

  $(2x-y)^3+8xy(2x-y) \geq 0$ lub

  $(2x-y)^3 \geq -8xy(2x-y)$,

ALBO
- przekształci nierówność do postaci

  $2x(4x^2-y^2)+y(4x^2-y^2) \geq 0$ lub

  $2x(4x^2-y^2) \geq -y(4x^2-y^2)$, lub

  $4x^2(2x+y)-y^2(2x+y) \geq 0$, lub

  $4x^2(2x+y) \geq y^2(2x+y)$.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy przekształci nierówność do postaci $(2x-y)(2x+y)^2 \geq 0$.

Zdający otrzymuje .... 3 pkt
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie – zdający musi spełnić warunek określony w zasadach oceniania za 2 punkty oraz uzasadnić, że $(2x-y)>0$, powołując się na założenie, oraz zapisać, że kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny.

Uwaga:
Jeśli zdający sprawdza prawdziwość nierówności jedynie dla wybranych wartości x i y, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1. (różnica sześcianów)
Przekształcamy równoważnie nierówność $7x^3+4x^2y\geq y^3+2xy^2-x^3$, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę sześcianów:

$$8x^3-y^3+4x^2y-2xy^2\geq 0$$

$$(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)+4x^2y-2xy^2\geq 0$$

$$(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)+2xy(2x-y)\geq 0$$

$$(2x-y)(4x^2+4xy+y^2)\geq 0$$

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy i otrzymujemy

$$(2x-y)(2x+y)^2\geq 0$$

Z założenia $2x>y$, więc $(2x-y)>0$.
Kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest liczba nieujemną, więc $(2x+y)^2\geq 0$.
Zatem wyrażenie $(2x-y)(2x+y)^2$ jest nieujemne jako iloczyn liczby dodatniej i nieujemnej, więc nierówność $(2x-y)(2x+y)^2\geq 0$ jest prawdziwa. To oznacza, że nierówność $7x^3+4x^2y\geq y^3+2xy^2-x^3$ jest także prawdziwa.

Sposób 2. (sześcian różnicy)
Przekształcamy nierówność $7x^3+4x^2y\geq y^3+2xy^2-x^3$ do postaci

$$8x^3-y^3-2xy^2+4x^2y\geq 0$$

Ponieważ $(2x-y)^3=8x^3-y^3-12x^2y+6xy^2$, więc otrzymujemy

$$8x^3-y^3-12x^2y+6xy^2+16x^2y-8xy^2\geq 0$$

$$(2x-y)^3+16x^2y-8xy^2\geq 0$$

$$(2x-y)^3+8xy(2x-y)\geq 0$$

$$(2x-y)[(2x-y)^2+8xy]\geq 0$$

$$(2x-y)(4x^2-4xy+y^2+8xy)\geq 0$$

$$(2x-y)(2x+y)^2\geq 0$$

Z założenia $2x > y$, więc $(2x - y) > 0$.
Kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest liczba nieujemną, więc $(2x + y)^2 \geq 0$.
Zatem wyrażenie $(2x - y)(2x + y)^2$ jest nieujemne jako iloczyn liczby dodatniej i nieujemnej, więc nierówność $(2x - y)(2x + y)^2 \geq 0$ jest prawdziwa. To oznacza, że nierówność $7x^3 + 4x^2y \geq y^3 + 2xy^2 - x^3$ jest także prawdziwa.

<u>Sposób 3.</u> (różnica kwadratów)
Przekształcamy równoważnie nierówność $7x^3 + 4x^2y \geq y^3 + 2xy^2 - x^3$, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów:

$$8x^3 - 2xy^2 + 4x^2y - y^3 \geq 0$$

$$2x(4x^2 - y^2) + y(4x^2 - y^2) \geq 0$$

$$(2x + y)(4x^2 - y^2) \geq 0$$

$$(2x + y)(2x + y)(2x - y) \geq 0$$

$$(2x - y)(2x + y)^2 \geq 0$$

Z założenia $2x > y$, więc $(2x - y) > 0$.
Kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest liczba nieujemną, więc $(2x + y)^2 \geq 0$.
Zatem wyrażenie $(2x - y)(2x + y)^2$ jest nieujemne jako iloczyn liczby dodatniej i nieujemnej, więc nierówność $(2x - y)(2x + y)^2 \geq 0$ jest prawdziwa. To oznacza, że nierówność $7x^3 + 4x^2y \geq y^3 + 2xy^2 - x^3$ jest także prawdziwa.

Zadanie 7. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: R3.8) rozwiązuje równania […] z wartością bezwzględną […].

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy:

- zapisze przedziały $(-\infty, 3)$ oraz $\langle 3, +\infty)$ i co najmniej w jednym z nich zapisze poprawną postać równania bez użycia symbolu wartości bezwzględnej

ALBO

- zapisze alternatywę równań $x - 3 = 2x + 11$ lub $x - 3 = -2x - 11$ i rozwiąże oba otrzymane równania: $x = -14$ lub $x = -\frac{8}{3}$,

ALBO

- zapisze równanie $(x - 3)^2 = (2x + 11)^2$ i rozwiąże je: $x = -14$ lub $x = -\frac{8}{3}$,

ALBO

- zapisze alternatywę równań $x - 3 = 2x + 11$ lub $x - 3 = -2x - 11$ i zapisze założenie $2x + 11 \geq 0$,

ALBO

- narysuje w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g określonych wzorami $f(x) = |x - 3|$ oraz $g(x) = 2x + 11$.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy:

- w każdym z przedziałów $(-\infty, 3)$ oraz $\langle 3, +\infty)$ zapisze poprawną postać równania $|x - 3| = 2x + 11$ bez użycia symbolu wartości bezwzględnej i w jednym z tych przedziałów rozwiąże równanie

ALBO

- rozwiąże alternatywę równań $x - 3 = 2x + 11$ lub $x - 3 = -2x - 11$ i sprawdzi rachunkowo, czy otrzymane liczby są rozwiązaniami równania $|x - 3| = 2x + 11$, ale w trakcie rozwiązania popełni błędy rachunkowe,

ALBO

- zapisze alternatywę równań $x - 3 = 2x + 11$ lub $x - 3 = -2x - 11$ i założenie $2x + 11 \geq 0$ oraz rozwiąże oba równania: $x = -14$ lub $x = -\frac{8}{3}$,

ALBO

- zapisze odciętą punktu przecięcia wykresów funkcji f i g: $x = -\frac{8}{3}$.

Zdający otrzymuje .... 3 pkt
gdy zastosuje poprawną metodę rozwiązania równania i otrzyma prawidłowy wynik: $x = -\frac{8}{3}$, a w przypadku metody graficznej sprawdzi rachunkowo, że liczba $\left(-\frac{8}{3}\right)$ jest rozwiązaniem równania.

Uwagi:
1. Jeśli zdający opuści symbol wartości bezwzględnej, nie uwzględniając w żaden sposób przedziału, w którym odpowiednie wyrażenie jest dodatnie/ujemne, i w rezultacie zapisze jedynie alternatywę $x - 3 = 2x + 11$ lub $x - 3 = -2x - 11$ i na tym poprzestanie, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeśli zdający rozwiązuje równanie w przedziałach $(-\infty\,,3)$ oraz $(3,+\infty)$ i nie rozważa przypadku $x = 3$, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Jeśli zdający rozwiązuje równanie w przedziałach $(-\infty,0)$ oraz $\langle 0,+\infty)$, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
4. Jeśli zdający przedstawia dwa rozwiązania, z których jedno jest w pełni poprawne, a drugie niekompletne/błędne, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

<u>Sposób 1.</u>
Równanie zapisujemy w każdym z przedziałów $(-\infty,3)$, $\langle 3,+\infty)$ bez użycia symbolu wartości bezwzględnej.

Gdy $x \in (-\infty,3)$, to równanie ma postać $3 - x = 2x + 11$.
Równanie $3 - x = 2x + 11$ ma jedno rozwiązanie $x = -\frac{8}{3}$. Jest to liczba należąca do przedziału $(-\infty,3)$, więc jest to jedno z rozwiązań równania $|x-3| = 2x + 11$.

Gdy $x \in \langle 3,+\infty)$, to równanie ma postać $x - 3 = 2x + 11$.
Równanie $x - 3 = 2x + 11$ ma również jedno rozwiązanie $x = -14$. Ta liczba nie należy jednak do przedziału $\langle 3,+\infty)$, więc nie jest rozwiązaniem równania $|x-3| = 2x + 11$.
W rezultacie równanie $|x-3| = 2x + 11$ ma jedno rozwiązanie: $x = -\frac{8}{3}$.

<u>Sposób 2.</u>
Jeżeli istnieją rozwiązania równania $|x-3| = 2x + 11$, to są one rozwiązaniami alternatywy równań

$$x - 3 = 2x + 11 \quad \text{lub} \quad x - 3 = -2x - 11$$

Stąd otrzymujemy $x = -14$ lub $x = -\frac{8}{3}$.
Sprawdzamy, która z tych liczb jest rozwiązaniem równania $|x-3| = 2x + 11$.

Gdy $x = -14$, to lewa strona równania jest równa $|-14-3| = 17$, natomiast prawa strona jest równa $2 \cdot (-14) + 11 = -17$. Zatem liczba (-14) nie jest rozwiązaniem równania.

Gdy $x = -\frac{8}{3}$, to lewa strona równania jest równa $\left|-\frac{8}{3} - 3\right| = \frac{17}{3}$, natomiast prawa strona jest równa $2 \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) + 11 = \frac{17}{3}$. Zatem liczba $\left(-\frac{8}{3}\right)$ jest rozwiązaniem równania.

W rezultacie równanie ma jedno rozwiązanie: $x = -\frac{8}{3}$.

<u>Sposób 3.</u>

Gdy $2x + 11 < 0$, czyli $x < -\frac{11}{2}$, to równanie $|x - 3| = 2x + 11$ jest sprzeczne, gdyż lewa jego strona jest nieujemna, a prawa ujemna.

Gdy $2x + 11 \geq 0$, czyli $x \geq -\frac{11}{2}$, to równanie $|x - 3| = 2x + 11$ jest równoważne alternatywie równań

$$x - 3 = 2x + 11 \quad \text{lub} \quad x - 3 = -2x - 11$$

Stąd otrzymujemy $x = -14$ lub $x = -\frac{8}{3}$.

Tylko druga z tych liczb jest nie mniejsza od $\left(-\frac{11}{2}\right)$. Zatem równanie $|x - 3| = 2x + 11$ ma tylko jedno rozwiązanie: $x = -\frac{8}{3}$.

Zadanie 8. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: R7.4) znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy spełni jeden z poniższych warunków:

1) zapisze związek między długością jednej z podstaw trapezu a promieniem R_2 okręgu opisanego na trójkącie CPD (lub promieniem R_1 okręgu opisanego na trójkącie APB), np. $\frac{|CD|}{R_2} = \frac{|CD|+2}{R_2+3}$, $\frac{|AB|-2}{R_2} = \frac{|AB|}{R_2+3}$, $\frac{|AB|}{R_1} = \frac{|AB|-2}{R_1-3}$
2) zapisze związki między długościami podstaw trapezu, promieniami okręgów opisanych na trójkątach ABP i CDP oraz związek między długościami podstaw trapezu i promieniami okręgów, np. $|AB| = |CD| + 2$ i $R_1 = R_2 + 3$ i $\frac{|AB|}{R_1} = \frac{|CD|}{R_2}$,
3) zapisze związki: $\frac{|AB|}{\sin\alpha} = 2R_1$, $\frac{|CD|}{\sin\alpha} = 2R_2$, $|CD| + 2 = |AB|$, $R_1 = R_2 + 3$,
4) zapisze równanie z dwiema niewiadomymi – długością jednej z podstaw trapezu i sinusem kąta α, np. $\frac{|CD|}{\sin\alpha} = \frac{|CD|+2}{\sin\alpha} - 6$,
5) zapisze warunek $\cos\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{6}$ jako warunek równoważny tezie.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy:

- gdy spełni jeden z warunków 1)–4) zapisanych w zasadach oceniania za 1 punkt **oraz** obliczy $\sin\alpha$: $\sin\alpha = \frac{1}{3}$

ALBO

- zastosuje twierdzenie cosinusów do trójkąta AS_1B i obliczy wartość cosinusa kąta środkowego opartego na tym samym łuku, co kąt APB: $\cos 2\alpha = \frac{7}{9}$ (sposób 4.).

Zdający otrzymuje .... 3 pkt
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Uwagi:

1. Jeśli zdający wprowadzi do rozwiązania dodatkowe założenia, nie wynikające z treści zadania, i korzysta z tych założeń, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**, o ile nie nabył praw do innej punktacji.
2. Jeśli zdający w wyniku popełnionego błędu otrzyma równość $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1. (podobieństwo trójkątów)

Oznaczmy przez R_2 promień okręgu opisanego na trójkącie CPD, a przez α – miarę kąta ostrego CPD.

Ponieważ odcinki AB i CD są równoległe, więc $|\measuredangle PCD| = |\measuredangle PAB|$ i $|\measuredangle ABP| = |\measuredangle PDC|$ (kąty naprzemianległe) oraz $|\measuredangle CPD| = |\measuredangle APB|$ (kąty wierzchołkowe). Zatem trójkąty CPD i APB są podobne (na mocy cechy *kkk*). Stąd wynika, że

$$\frac{R_2 + 3}{|AB|} = \frac{R_2}{|CD|}$$

i wobec $|AB| = |CD| + 2$ otrzymujemy dalej

$$\frac{R_2 + 3}{|CD| + 2} = \frac{R_2}{|CD|}$$

$$2R_2 = 3 \cdot |CD|$$

$$|CD| = \frac{2}{3}R_2$$

Do trójkąta CPD stosujemy twierdzenie sinusów i otrzymujemy

$$\frac{|CD|}{\sin\alpha} = 2R_2$$

co w połączeniu ze związkiem $|CD| = \frac{2}{3}R_2$ prowadzi do równania

$$\sin\alpha = \frac{1}{3}$$

Korzystamy z tożsamości trygonometrycznej $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ i, uwzględniając, że $\alpha < 90°$, otrzymujemy

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Do trójkąta CPD stosujemy twierdzenie cosinusów, korzystamy ze związku $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ i otrzymujemy

$$|CD|^2 = |DP|^2 + |CP|^2 - 2 \cdot |DP| \cdot |CP| \cdot \cos\alpha$$

$$|CD|^2 = |DP|^2 + |CP|^2 - 2 \cdot |DP| \cdot |CP| \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot |DP| \cdot |CP| = |DP|^2 + |CP|^2 - |CD|^2$$

To należało pokazać.

<u>Sposób 2.</u> (twierdzenie sinusów)
Oznaczmy przez R_2 promień okręgu opisanego na trójkącie CPD, a przez α – miarę kąta ostrego CPD.
Ponieważ kąty ostre CPD i APB są wierzchołkowe, to $|\measuredangle CPD| = |\measuredangle APB| = \alpha$.
Do trójkątów APB i CPD stosujemy twierdzenie sinusów i otrzymujemy

$$\frac{|AB|}{\sin\alpha} = 2(R_2 + 3) \quad \text{oraz} \quad \frac{|CD|}{\sin\alpha} = 2R_2$$

Stąd $\frac{|AB|}{2(R_2+3)} = \frac{|CD|}{2R_2}$, a ponieważ z założenia $|AB| = |CD| + 2$, więc $\frac{|CD|+2}{2(R_2+3)} = \frac{|CD|}{2R_2}$
i w rezultacie

$$|CD| = \frac{2}{3}R_2$$

Ze związków $|CD| = \frac{2}{3}R_2$ i $\frac{|CD|}{\sin\alpha} = 2R_2$ otrzymujemy

$$\sin\alpha = \frac{1}{3}$$

Korzystamy z tożsamości trygonometrycznej $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ i, uwzględniając, że $\alpha < 90°$, otrzymujemy

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Do trójkąta CPD stosujemy twierdzenie cosinusów, korzystamy ze związku $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ i otrzymujemy

$$|CD|^2 = |DP|^2 + |CP|^2 - 2 \cdot |DP| \cdot |CP| \cdot \cos\alpha$$

$$|CD|^2 = |DP|^2 + |CP|^2 - 2 \cdot |DP| \cdot |CP| \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot|DP|\cdot|CP|=|DP|^2+|CP|^2-|CD|^2$$

To należało pokazać.

Sposób 3.

Oznaczmy przez R_2 promień okręgu opisanego na trójkącie CPD, a przez α – miarę kąta ostrego CPD.

Ponieważ kąty ostre CPD i APB są wierzchołkowe, to $|\sphericalangle CPD|=|\sphericalangle APB|=\alpha$.

Do trójkątów APB i CPD stosujemy twierdzenie sinusów i otrzymujemy

$$\frac{|AB|}{\sin\alpha}=2(R_2+3)\quad \text{oraz}\quad \frac{|CD|}{\sin\alpha}=2R_2$$

Łącząc obie te zależności i korzystając z założenia $|AB|=|CD|+2$, otrzymujemy

$$\frac{|AB|}{\sin\alpha}=\frac{|CD|}{\sin\alpha}+6$$

$$\frac{|CD|+2}{\sin\alpha}=\frac{|CD|}{\sin\alpha}+6$$

$$\frac{|CD|}{\sin\alpha}+\frac{2}{\sin\alpha}=\frac{|CD|}{\sin\alpha}+6$$

$$\sin\alpha=\frac{1}{3}$$

Korzystamy z tożsamości trygonometrycznej $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ i, uwzględniając, że $\alpha<90°$, otrzymujemy

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cos^2\alpha=1$$

$$\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Do trójkąta CPD stosujemy twierdzenie cosinusów, korzystamy ze związku $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ i otrzymujemy

$$|CD|^2=|DP|^2+|CP|^2-2\cdot|DP|\cdot|CP|\cdot\cos\alpha$$

$$|CD|^2=|DP|^2+|CP|^2-2\cdot|DP|\cdot|CP|\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot|DP|\cdot|CP|=|DP|^2+|CP|^2-|CD|^2$$

To należało pokazać.

Sposób 4. (kąt wpisany – kąt środkowy)
Niech o_1 będzie okręgiem o środku S_1 i promieniu R_1 opisanym na trójkącie APB.
Oznaczmy przez α miarę kąta ostrego APB.
Ponieważ odcinki AB i CD są równoległe, więc $|\measuredangle PCD| = |\measuredangle PAB|$ i $|\measuredangle ABP| = |\measuredangle PDC|$ (kąty naprzemianległe) oraz $|\measuredangle CPD| = |\measuredangle APB|$ (kąty wierzchołkowe).
Na mocy cechy *kkk* trójkąty CPD i APB są podobne.
Niech $x = |AB|$. Wtedy $|CD| = x - 2$. Z podobieństwa trójkątów CPD i APB wynika równość

$$\frac{x-2}{x} = \frac{R_1 - 3}{R_1}$$

skąd otrzymujemy $R_1 = \frac{3}{2}x$.

Zauważmy, że 2α jest miarą kąta środkowego, opartego na tym samym łuku okręgu o_1 , co kąt APB. Korzystamy z twierdzenia cosinusów zastosowanego do trójkąta AS_1B i otrzymujemy kolejno

$$x^2 = 2R_1^2 \cdot (1 - \cos 2\alpha)$$

$$x^2 = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}x\right)^2 \cdot (1 - \cos 2\alpha)$$

skąd po obustronnym podzieleniu przez x^2 otrzymujemy równość

$$1 = \frac{9}{2} \cdot (1 - \cos 2\alpha)$$

Zatem $\cos 2\alpha = \frac{7}{9}$. Jest ona równoważna równości $2\cos^2\alpha - 1 = \frac{7}{9}$, z której obliczamy $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ (ujemną wartość odrzucamy ze względu na to, że kąt o mierze α jest kątem wewnętrznym trójkąta ostrokątnego CPD).
Do trójkąta CPD stosujemy twierdzenie cosinusów, korzystamy ze związku $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ i otrzymujemy

$$|CD|^2 = |DP|^2 + |CP|^2 - 2 \cdot |DP| \cdot |CP| \cdot \cos\alpha$$

$$|CD|^2 = |DP|^2 + |CP|^2 - 2 \cdot |DP| \cdot |CP| \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot |DP| \cdot |CP| = |DP|^2 + |CP|^2 - |CD|^2$$

To należało pokazać.

Zadanie 9. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: R3.4) stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - a$; R3.6) rozwiązuje łatwe nierówności wielomianowe.

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy:

- zapisze równanie z niewiadomą m wynikające z warunków zadania:

$$4 \cdot (-2)^3 - 6 \cdot (-2)^2 - (5m + 1) \cdot (-2) - 2m = -30$$

ALBO

- wyznaczy resztę z dzielenia wielomianu W przez dwumian $(x + 2)$ i zapisze równanie $-2m + 2(5m - 27) = -30$.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy obliczy m: $m = 3$.

Zdający otrzymuje .... 3 pkt
gdy obliczy/poda wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x) = 4x^3 - 6x^2 - 16x - 6$:
$x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = 3$.

Zdający otrzymuje .... 4 pkt
gdy rozwiąże nierówność $W(x) \geq 0$: $x \in \left\langle -1, -\frac{1}{2} \right\rangle \cup \langle 3, +\infty)$.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający poprawnie interpretuje warunki zadania $W(-2) = -30$, ale popełnia błędy rachunkowe, zapisując równanie wynikające z tego warunku, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający popełnia błąd w interpretacji warunków zadania, zapisując np. $W(2) = -30$, w konsekwencji którego zapisuje błędne równanie wynikające z tego warunku, lecz otrzyma wielomian o trzech różnych pierwiastkach i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca, to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający w wyniku błędów rachunkowych przekształci wielomian W do postaci, w której otrzymany wielomian ma co najwyżej dwa pierwiastki (jeden dwukrotny i jeden pierwiastek jednokrotny), to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej:
   3 punkty – jeśli uwzględnia krotności pierwiastków,
   2 punkty – jeśli nie uwzględnia krotności pierwiastków.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Reszta z dzielenia wielomianu W przez dwumian $x+2$ jest równa (-30), zatem $W(-2)=-30$. Stąd otrzymujemy

$$4\cdot(-2)^3-6\cdot(-2)^2-(5m+1)(-2)-2m=-30$$

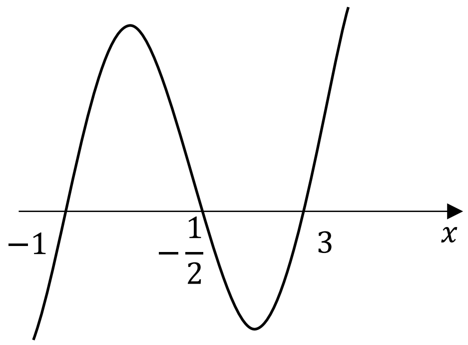
Rozwiązaniem tego równania jest $m=3$.
Rozwiązujemy nierówność $4x^3-6x^2-16x-6\geq 0$, stosując przekształcenia równoważne, i otrzymujemy kolejno:

$$4x^3-6x^2-16x-6\geq 0$$

$$2(x+1)(2x^2-5x-3)\geq 0$$

$$4(x+1)(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right)\geq 0$$

Szkicujemy wykres wielomianu $W(x)=4(x+1)(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right)$



i odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności $W(x)\geq 0$: $\left\langle -1,-\frac{1}{2}\right\rangle\cup\langle 3,+\infty)$.

Zadanie 10. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: P5.3) stosuje wzór na n–ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego; R5.2) rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy.

Zasady oceniania dla sposobów 1. i 2.

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy:

- obliczy iloraz q ciągu (a_n): $q = \frac{2}{5}$

ALBO

- zapisze $b_1 + 3r = b_4$,

ALBO

- zapisze $S_{25} = \frac{b_1+b_{25}}{2} \cdot 25$ lub $S_{25} = \frac{2b_1+24r}{2} \cdot 25$.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy:

- zapisze równanie z dwiema niewiadomymi b_1 i r, np. $b_1 + 3r = 108$,
  $1125 = \frac{2b_1+24r}{2} \cdot 25$

ALBO

- zapisze $S_{25} = \frac{2b_1+24r}{2} \cdot 25$ oraz $b_1 + 3r = b_4$.

Zdający otrzymuje .... 3 pkt
gdy zapisze układ dwóch niezależnych równań z dwiema niewiadomymi b_1 i r, np.
$b_1 + 3r = 108$ oraz $1125 = \frac{2b_1+24r}{2} \cdot 25$.

Zdający otrzymuje .... 4 pkt
gdy obliczy b_1: $b_1 = 129$.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający myli własności ciągu arytmetycznego z własnościami ciągu geometrycznego, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeśli zdający rozpatruje przypadek $q = 0$ i w ostatecznej odpowiedzi nie odrzuca otrzymanej z tego przypadku wartości b_1, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Jeśli zdający, obliczając iloraz ciągu (a_n), popełni błąd i otrzyma jedynie wartość ilorazu q spoza przedziału $(-1, 1)$, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.
4. Jeśli zdający, obliczając iloraz ciągu (a_n), popełni błąd i uzyska wartość ilorazu ze zbioru $(-1,0) \cup (0,1)$, to może otrzymać za całe rozwiązanie co najwyżej:
   3 punkty – gdy popełni jedynie błąd rachunkowy (lub błąd nieuwagi),
   2 punkty – gdy popełni błąd rzeczowy.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Korzystamy z własności ciągu geometrycznego i przekształcamy równanie $a_{22} = \frac{5}{4}a_{23} + \frac{1}{5}a_{21}$ do postaci $a_{21} \cdot q = \frac{5}{4}a_{21} \cdot q^2 + \frac{1}{5}a_{21}$. Dzieląc obie strony równania przez $a_{21} \neq 0$, otrzymujemy równanie $\frac{5}{4}q^2 - q + \frac{1}{5} = 0$, którego rozwiązaniem jest $q = \frac{2}{5}$.

Ponieważ $|q| = |\frac{2}{5}| < 1$, zatem istnieje suma S wszystkich wyrazów ciągu (a_n).

Obliczamy sumę $S = \frac{675}{1-\frac{2}{5}} = 1125$ i $a_3 = 675 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 108$.

Trzeci wyraz ciągu geometrycznego jest równy czwartemu wyrazowi ciągu arytmetycznego, więc $b_4 = b_1 + 3r = 108$.

Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) jest równa sumie dwudziestu pięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (b_n), zatem

$$1125 = \frac{2b_1 + 24r}{2} \cdot 25$$

$$45 = b_1 + 12r$$

Z równań $b_1 + 3r = 108$ i $b_1 + 12r = 45$ otrzymujemy $r = -7$.
Zatem $b_1 = 108 - 3 \cdot (-7) = 129$.

Sposób 2.

Korzystamy z własności ciągu geometrycznego i przekształcamy równanie $a_{22} = \frac{5}{4}a_{23} + \frac{1}{5}a_{21}$ do postaci $a_2 \cdot q^{20} = \frac{5}{4}a_3 \cdot q^{20} + \frac{1}{5}a_1 \cdot q^{20}$. Dzieląc obie strony równania przez q (wszystkie wyrazy ciągu są dodatnie, więc $q \neq 0$), otrzymujemy $a_2 = \frac{5}{4}a_3 + \frac{1}{5}a_1$. Stąd i z własności ciągu geometrycznego otrzymujemy dalej

$$\left(\frac{5}{4}a_3 + \frac{1}{5}a_1\right)^2 = 675 \cdot a_3$$

$$\frac{25}{16}a_3^2 - \frac{675}{2}a_3 + 18225 = 0$$

Rozwiązaniem równania jest $a_3 = 108$. Stosujemy wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego i zapisujemy $108 = 675 \cdot q^2$, skąd $q = \frac{2}{5}$ lub $q = -\frac{2}{5}$. Ponieważ wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie, więc $q = \frac{2}{5}$.

Stwierdzamy, że $|q| < 1$, więc istnieje suma S wszystkich wyrazów ciągu (a_n). Obliczamy sumę $S = \frac{675}{1-\frac{2}{5}} = 1125$.

Trzeci wyraz ciągu geometrycznego jest równy czwartemu wyrazowi ciągu arytmetycznego, więc $b_4 = b_1 + 3r = 108$.

Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) jest równa sumie dwudziestu pięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (b_n), zatem

$$1125 = \frac{2b_1 + 24r}{2} \cdot 25$$

$$45 = b_1 + 12r$$

Z równań $b_1 + 3r = 108$ i $b_1 + 12r = 45$ otrzymujemy $r = -7$.
Zatem $b_1 = 108 - 3 \cdot (-7) = 129$.

Zadanie 11. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: R6.5) stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów; R6.6) rozwiązuje równania trygonometryczne […].

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy:

- przekształci równoważnie równanie $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$, stosując wzór na sumę sinusów lub sinus sumy, lub sinus różnicy, lub sinus podwojonego kąta, lub sinus potrojonego kąta, np.:

  $2\sin 2x\cos(-x) + \sin 2x = 0$

  lub

  $2\sin(1{,}5x)\cos(-0{,}5x) + \sin 3x = 0,$

  lub

  $\sin x + 2\sin(2{,}5x)\cos(-0{,}5x) = 0,$

  lub

  $\sin x + \sin 2x + \sin x\cos 2x + \cos x\sin 2x = 0,$

  lub

  $\sin 2x\cos x - \cos 2x\sin x + \sin 2x + \sin x\cos 2x + \cos x\sin 2x = 0,$

  lub

  $\sin x + \sin 2x + 2\sin(1{,}5x)\cos(1{,}5x) = 0,$

  lub

  $\sin x + \sin 2x + 3\sin x - 4\sin^3 x = 0,$

ALBO

- poda dwie spośród liczb: $0, \frac{\pi}{2}, \pi$, i zapisze, że podane liczby spełniają równanie.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy przekształci równanie $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ do postaci alternatywy równań trygonometrycznych, np.:
$\sin 2x = 0$ lub $2\cos x + 1 = 0,$
$\sin(1{,}5x) = 0$ lub $\cos(-0{,}5x) + \cos(1{,}5x) = 0,$

$\cos(0{,}5x) = 0$ lub $\sin(0{,}5x) + \sin(2{,}5x) = 0$,
$\sin x = 0$ lub $4\cos^2 x + 2\cos x = 0$.

Zdający otrzymuje .... 3 pkt
gdy:

- przekształci równanie $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ do postaci alternatywy równań trygonometrycznych i rozwiąże każde z tych równań w zbiorze liczb rzeczywistych

ALBO

- przekształci równanie $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ do postaci alternatywy równań trygonometrycznych i rozwiąże jedno z tych równań w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$.

Zdający otrzymuje .... 4 pkt
gdy zastosuje poprawną metodę rozwiązania równania $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ i otrzyma poprawny zbiór rozwiązań w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$: $\{0, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi\}$.

Uwagi:
1. Jeśli zdający popełnia jednokrotnie błąd polegający na:
   - niepoprawnym zastosowaniu wzorów trygonometrycznych na: sinus sumy/różnicy lub sumę/różnicę sinusów, lub sinus podwojonego/potrojonego kąta

   ALBO
   - błędnym zastosowaniu nieparzystości/parzystości funkcji trygonometrycznej

   i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca oraz otrzyma co najmniej trzy rozwiązania z przedziału $\langle 0, \pi \rangle$, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył praw do innej punktacji.
2. Jeśli zdający zastępuje $\cos x$ przez $\sqrt{1 - \sin^2 x}$ i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, otrzymując co najmniej trzy rozwiązania z przedziału $\langle 0, \pi \rangle$, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Jeśli zdający dzieli obie strony równania przez wyrażenie $a(x)$ zawierające niewiadomą x i nie rozważa przypadku $a(x) = 0$, ale konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca i otrzyma co najmniej trzy rozwiązania z przedziału $\langle 0, \pi \rangle$, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

<u>Sposób 1.</u> (suma sinusów)
Przekształcamy równanie w sposób równoważny:

$$\sin x + \sin 3x + \sin 2x = 0$$

$$2\sin 2x \cos(-x) + \sin 2x = 0$$

$$\sin 2x\,(2\cos x + 1) = 0$$

$$\sin 2x = 0 \quad \text{lub} \quad \cos x = -\frac{1}{2}$$

Stąd $2x = k\pi$ lub $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Zatem $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$ lub $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Rozwiązaniami równania $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$ są liczby: 0, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, π.

Inne przykładowe realizacje.

1)

Przekształcamy równanie w sposób równoważny:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$$

$$2\sin(1{,}5x)\cos(-0{,}5x) + \sin 3x = 0$$

$$2\sin(1{,}5x)\cos(-0{,}5x) + 2\sin(1{,}5x)\cos(1{,}5x) = 0$$

$$2\sin(1{,}5x)\left(\cos(-0{,}5x) + \cos(1{,}5x)\right) = 0$$

$$2\sin(1{,}5x) = 0 \quad \text{lub} \quad \cos(-0{,}5x) + \cos(1{,}5x) = 0$$

$$2\sin(1{,}5x) = 0 \quad \text{lub} \quad 2\cos(0{,}5x)\cos(-x) = 0$$

Stąd $1{,}5x = k\pi$ lub $0{,}5x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Zatem $x = \frac{2\pi}{3} \cdot k$ lub $x = \pi + 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Rozwiązaniami równania $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$ są liczby: 0, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, π.

2)

Przekształcamy równanie w sposób równoważny:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$$

$$\sin x + 2\sin(2{,}5x)\cos(-0{,}5x) = 0$$

$$2\sin(0{,}5x)\cos(0{,}5x) + 2\sin(2{,}5x)\cos(0{,}5x) = 0$$

$$2\cos(0{,}5x)\left(\sin(0{,}5x) + \sin(2{,}5x)\right) = 0$$

$$2\cos(0{,}5x) = 0 \quad \text{lub} \quad \sin(0{,}5x) + \sin(2{,}5x) = 0$$

$$2\cos(0{,}5x) = 0 \quad \text{lub} \quad 2\sin(1{,}5x)\cos(-x) = 0$$

Stąd $0{,}5x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ lub $1{,}5x = k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Zatem $x = \pi + 2k\pi$ lub $x = \frac{2\pi}{3} \cdot k$ lub $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Rozwiązaniami równania $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$ są liczby: 0, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, π.

<u>Sposób 2.</u> (sinus sumy)
Przekształcamy równanie w sposób równoważny:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$$

$$\sin x + \sin 2x + \sin(x + 2x) = 0$$

$$\sin x + \sin 2x + \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x = 0$$

$$\sin x\,(1 + 2\cos x + \cos 2x + 2\cos^2 x) = 0$$

$$\sin x\,(1 + 2\cos x + 2\cos^2 x - 1 + 2\cos^2 x) = 0$$

$$\sin x = 0 \quad \text{lub} \quad 4\cos^2 x + 2\cos x = 0$$

$$\sin x = 0 \quad \text{lub} \quad \cos x = 0 \quad \text{lub} \quad 2\cos x + 1 = 0$$

Stąd $x = k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ lub $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.
Rozwiązaniami równania $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$ są liczby: 0, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, π.

<u>Sposób 3.</u> (sinus różnicy)
Przekształcamy równanie w sposób równoważny:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$$

$$\sin(2x - x) + \sin 2x + \sin(x + 2x) = 0$$

$$\sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x + \sin 2x + \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x = 0$$

$$2\sin 2x \cos x + \sin 2x = 0$$

$$\sin 2x\,(2\cos x + 1) = 0$$

I dalej jak w sposobie 1.

Zadanie 12. (0–5)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymagania ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne. IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: R3.1) stosuje wzory Viète'a; R3.2) rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem.

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy:

- poprawnie rozwiąże nierówność $\Delta > 0$: $m \neq 1$
  (dla sposobu 1.)

ALBO

- przekształci warunek $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + 2 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$ do postaci pozwalającej bezpośrednio zastosować wzory Viète'a, np. $\frac{x_1+x_2}{x_1 \cdot x_2} + 2 = \frac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2}{(x_1 \cdot x_2)^2}$
  (dla sposobów 1. i 2.),

ALBO

- wyznaczy pierwiastki trójmianu $x^2 - (m+1)x + m$: $x_1 = 1$, $x_2 = m$
  (dla sposobu 2.).

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy:

- poprawnie rozwiąże nierówność $\Delta > 0$: $m \neq 1$
  oraz
  przekształci warunek $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + 2 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$ do postaci pozwalającej bezpośrednio zastosować wzory Viète'a, np. $\frac{x_1+x_2}{x_1 \cdot x_2} + 2 = \frac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2}{(x_1 \cdot x_2)^2}$
  (dla sposobu 1.)

ALBO

- zapisze równanie z jedną niewiadomą m, np.
  $\frac{m+1}{m} + 2 = \frac{(m+1)^2 - 2m}{m^2}$, $1 + \frac{1}{m} + 2 = 1 + \frac{1}{m^2}$
  (dla sposobów 1. i 2.),

ALBO

- wyznaczy pierwiastki trójmianu $x^2 - (m+1)x + m$: $x_1 = 1$ lub $x_2 = m$
  oraz
  zapisze, że $x_1 \neq x_2$ dla $m \neq 1$
  (dla sposobu 2.).

Zdający otrzymuje .... 3 pkt
gdy:

- poprawnie rozwiąże nierówność $\Delta > 0$: $m \neq 1$
  oraz
  zapisze równanie z jedną niewiadomą m, np.
  $\frac{m+1}{m} + 2 = \frac{(m+1)^2 - 2m}{m^2}$, $1 + \frac{1}{m} + 2 = 1 + \frac{1}{m^2}$
  (dla sposobu 1.)

ALBO

- zapisze równanie
  $2m^2 + m - 1 = 0$ lub $\frac{2m^2+m-1}{m^2} = 0$ lub $m(2m^2 + m - 1) = 0$
  (dla sposobów 1. i 2.),

ALBO

- zapisze, że $x_1 \neq x_2$ dla $m \neq 1$
  oraz
  zapisze równanie z jedną niewiadomą m, np.
  $\frac{m+1}{m} + 2 = \frac{(m+1)^2 - 2m}{m^2}$, $1 + \frac{1}{m} + 2 = 1 + \frac{1}{m^2}$
  (dla sposobu 2.).

Zdający otrzymuje .... 4 pkt
gdy:

- poprawnie rozwiąże nierówność $\Delta > 0$: $m \neq 1$
  oraz
  gdy zapisze równanie
  $2m^2 + m - 1 = 0$ lub $\frac{2m^2+m-1}{m^2} = 0$ lub $m(2m^2 + m - 1) = 0$
  (dla sposobu 1.)

ALBO

- rozwiąże równanie $\frac{m+1}{m} + 2 = \frac{(m+1)^2 - 2m}{m^2}$ lub $1 + \frac{1}{m} + 2 = 1 + \frac{1}{m^2}$:
  $m = -1$ lub $m = \frac{1}{2}$
  (dla sposobów 1. i 2.),

ALBO

- zapisze, że $x_1 \neq x_2$ dla $m \neq 1$
  oraz
  zapisze równanie
  $2m^2 + m - 1 = 0$ lub $\frac{2m^2+m-1}{m^2} = 0$ lub $m(2m^2 + m - 1) = 0$
  (dla sposobu 2.).

Zdający otrzymuje .... 5 pkt
gdy spełni następujące cztery warunki:

1) zapisze $m \neq 0$

2) rozwiąże równanie $\frac{m+1}{m}+2=\frac{(m+1)^2-2m}{m^2}$ lub $1+\frac{1}{m}+2=1+\frac{1}{m^2}$:
   $m=-1$ lub $m=\frac{1}{2}$
3) rozwiąże nierówność $\Delta>0$
   LUB
   wyznaczy wartości parametru m, dla których $x_1\neq x_2$: $m\neq 1$ oraz sprawdzi, że otrzymane wartości parametru m spełniają warunki zadania
4) zapisze poprawną odpowiedź: $m=-1$ lub $m=\frac{1}{2}$.

Uwagi:
1. Jeśli zdający wprowadza dodatkowe założenie, nie wynikające z warunków zadania (np. $x_1+x_2\neq 0$), to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **4 punkty**.
2. Jeśli zdający stosuje błędną tożsamość: $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2$ i zamiast $\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}+2=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2}{(x_1\cdot x_2)^2}$ otrzyma $\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}+2=\frac{(x_1+x_2)^2}{(x_1\cdot x_2)^2}$ oraz doprowadzi rozwiązanie konsekwentnie do końca, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Jeśli zdający, wyznaczając pierwiastki trójmianu $x_1=1$ oraz $x_2=m$, przyjmuje błędnie $\sqrt{\Delta}=m-1$, i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
4. Jeśli zdający przy przekształcaniu warunku $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+2=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$ do postaci pozwalającej na zastosowanie wzorów Viète'a popełni błąd, w konsekwencji którego otrzymuje równanie liniowe z niewiadomą m, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (za poprawne zastosowanie wzorów Viète'a oraz rozwiązanie warunku $\Delta>0$).
5. Jeśli zdający poprawnie przekształci warunek $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+2=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$ i zapisze poprawne równanie z niewiadomą m, lecz w dalszej części popełnia błąd prowadzący do otrzymania równania liniowego z niewiadomą m, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.
Trójmian $x^2-(m+1)x+m$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy jego wyróżnik Δ jest dodatni. Rozwiązujemy warunek $\Delta>0$:

$$(m+1)^2-4m>0$$
$$m^2-2m+1>0$$
$$(m-1)^2>0$$

$$m \neq 1$$

Pierwiastki x_1 oraz x_2 trójmianu $x^2 - (m+1)x + m$ są różne od zera tylko wtedy, gdy $x_1 \cdot x_2 \neq 0$. Ze wzoru Viète'a otrzymujemy $m \neq 0$.

Równość $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + 2 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$ przekształcamy równoważnie

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} + 2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2}$$

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} + 2 = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2}{(x_1 \cdot x_2)^2}$$

i stosujemy wzory Viète'a: $x_1 + x_2 = m + 1$ i $x_1 \cdot x_2 = m$, otrzymując dalej

$$\frac{m+1}{m} + 2 = \frac{(m+1)^2 - 2m}{m^2}$$

$$m^2 + m + 2m^2 = m^2 + 1$$

$$2m^2 + m - 1 = 0$$

$$(m+1)(2m-1) = 0$$

$$m = -1 \text{ lub } m = \frac{1}{2}$$

Zatem równanie $x^2 - (m+1)x + m = 0$ ma dwa różne rozwiązania spełniające warunki zadania, gdy $m \in \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$.

<u>Sposób 2.</u>

Zauważamy, że trójmian $x^2 - (m+1)x + m$ można zapisać w postaci iloczynowej: $(x-1)(x-m)$, więc liczby 1 oraz m są pierwiastkami tego trójmianu. Zatem $x_1 \neq x_2$ gdy $m \neq 1$. Pierwiastki te są różne od zera, gdy $m \neq 0$.

Rozwiązujemy warunek $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + 2 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$:

$$1 + \frac{1}{m} + 2 = 1 + \frac{1}{m^2} \quad / \cdot m^2$$

$$m^2 + m + 2m^2 = m^2 + 1$$

$$2m^2 + m - 1 = 0$$

$$m = -1 \text{ lub } m = \frac{1}{2}$$

Zatem równanie $x^2 - (m+1)x + m = 0$ ma dwa różne rozwiązania spełniające warunki zadania dla $m \in \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$.

Zadanie 13. (0–5)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: P9.3) stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów […] graniastosłupów; R7.4) znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i cosinusów.

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**
gdy spełni jeden z poniższych warunków:

1) obliczy $\cos\alpha$: $\cos\alpha = \frac{5}{13}$
2) wyznaczy lub obliczy iloczyn długości przekątnych AF i AH:
   $|AF| \cdot |AH| = \frac{2P_{\Delta AFH}}{\sin\alpha}$ lub $|AF| \cdot |AH| = 57{,}2$
3) zapisze związek między długością przekątnej podstawy graniastosłupa i długościami krawędzi jego podstawy
   <u>oraz</u>
   związek między długością przekątnej jednej ze ścian bocznych graniastosłupa a długościami krawędzi tej ściany bocznej, np.:
   $|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2$ i $|AH|^2 = h^2 + |AD|^2$
   (lub $|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2$ i $|AF|^2 = h^2 + |AB|^2$)
4) zapisze równość wynikającą z twierdzenia cosinusów dla trójkąta AFH:
   $|FH|^2 = |AH|^2 + |AF|^2 - 2 \cdot |AH| \cdot |AF| \cdot \cos\alpha$.

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**
gdy spełni dwa spośród warunków 1)–4) określonych w zasadach oceniania za 1 punkt.

Zdający otrzymuje .... **3 pkt**
gdy spełni warunek 4) **oraz** dwa spośród warunków 1)–3) określonych w zasadach oceniania za 1 punkt.

Zdający otrzymuje .... **4 pkt**
gdy:

- spełni wszystkie warunki od 1) do 4) określone w zasadach oceniania za 1 punkt

ALBO

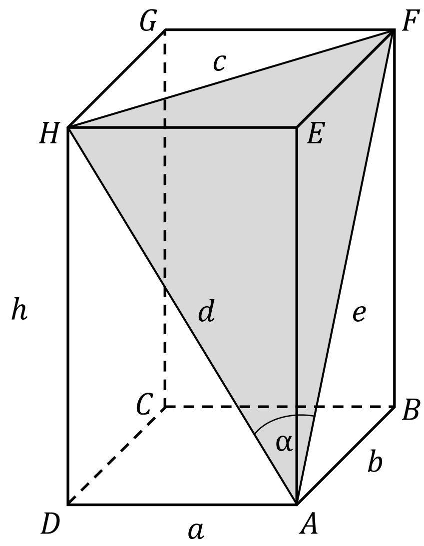
- zapisze równość, której bezpośrednie przekształcenie prowadzi do obliczenia wysokości graniastosłupa, np. $h^2 = \frac{5}{13}\sqrt{a^2 + h^2} \cdot \sqrt{b^2 + h^2}$.

Zdający otrzymuje .... **5 pkt**
gdy zastosuje poprawną metodę i obliczy wysokość h graniastosłupa: $h = \sqrt{22}$.

Uwagi:
1. Jeśli zdający niepoprawnie stosuje twierdzenie Pitagorasa lub twierdzenie cosinusów, i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać za całe rozwiązanie co najwyżej **3 punkty**.
2. Jeśli zdający zakłada, że $|AH| = |AF|$ albo że czworokąt $ABCD$ jest kwadratem i korzysta z tego, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.
3. Jeśli zdający zakłada, że trójkąt AFH jest prostokątny i z tego założenia korzysta, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **1 punkt** (gdy spełni trzecie kryterium zasad oceniania za 1 punkt).
4. Jeśli zdający pomija współczynnik $\frac{1}{2}$ we wzorze na pole trójkąta, to może otrzymać za całe rozwiązanie co najwyżej **4 punkty**.
5. Jeśli zdający przyjmuje konkretne wartości długości krawędzi graniastosłupa, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Oznaczmy $|AD| = a$, $|AB| = b$, $|AH| = d$, $|AF| = e$, $|FH| = c$ (zobacz rysunek).
Ponieważ $P_{\Delta AFH} = 26{,}4$ oraz $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, więc



$$P_{\Delta AFH} = \frac{1}{2} \cdot d \cdot e \cdot \sin\alpha$$

$$26{,}4 = \frac{1}{2} \cdot d \cdot e \cdot \frac{12}{13}$$

$$d \cdot e = 57{,}2$$

Stosujemy do trójkąta AFH twierdzenie cosinusów i otrzymujemy

$$c^2 = d^2 + e^2 - 2 \cdot d \cdot e \cdot \cos\alpha$$

$$c^2 = d^2 + e^2 - 2 \cdot 57{,}2 \cos\alpha$$

Obliczamy $\cos\alpha$: $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25}{169}$ i kąt α jest ostry, więc $\cos\alpha = \frac{5}{13}$. Zatem

$$c^2 = d^2 + e^2 - 2 \cdot 57{,}2 \cdot \frac{5}{13}$$

$$c^2 = d^2 + e^2 - 44$$

Stąd, wobec $c^2 = a^2 + b^2$ oraz $d^2 = h^2 + a^2$ i $e^2 = h^2 + b^2$, otrzymujemy

$$a^2 + b^2 = h^2 + a^2 + h^2 + b^2 - 44$$

$$h = \sqrt{22}$$

Zadanie 14. (0–6)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: P8.3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt; P8.6) oblicza odległość dwóch punktów; R8.1) oblicza odległość punktu od prostej; R8.4) oblicza współrzędne oraz długość wektora […].

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy:

- obliczy odległość punktu A od prostej $y = x - 1$: $d = 3\sqrt{2}$

ALBO

- gdy zapisze współrzędne punktu B lub C w zależności od jednej zmiennej, np. $B = (x_B\,, x_B - 1)$, $C = (x_C\,, x_C - 1)$,

ALBO

- zapisze równanie z niewiadomymi x_B, y_B, x_C, y_C wynikające z warunków zadania, np.

$$\frac{1}{2} \cdot |(x_B + 3) \cdot (y_C - 2) - (y_B - 2) \cdot (x_C + 3)| = 15$$

LUB

$$\sqrt{(x_C + 3)^2 + (y_C - 2)^2} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$$

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy:

- obliczy odległość d punktu A od prostej $y = x - 1$ oraz obliczy długości odcinków AC i BC: $|BC| = 5\sqrt{2}$, $d = 3\sqrt{2}$

ALBO

- zapisze równanie z niewiadomymi x_B i x_C , np.

$$\frac{1}{2} \cdot |(x_B + 3) \cdot (x_C - 3) - (x_B - 3) \cdot (x_C + 3)| = 15$$

LUB

$$\sqrt{(x_C + 3)^2 + (x_C - 3)^2} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (x_C - x_B)^2}$$

ALBO

- wyznaczy równanie prostej CS, w którym współczynniki są zależne od x_B:
$y - \frac{x_B+1}{2} = -\frac{x_B+3}{x_B-3} \cdot \left(x - \frac{x_B-3}{2}\right)$ (sposób 3.),

ALBO

- zapisze układ dwóch równań z czterema niewiadomymi x_B, y_B, x_C, y_C , np.
  $\frac{1}{2} \cdot |(x_B + 3) \cdot (y_C - 2) - (y_B - 2) \cdot (x_C + 3)| = 15$
  i $\sqrt{(x_C + 3)^2 + (y_C - 2)^2} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$.

Zdający otrzymuje .... 3 pkt
gdy:

- zapisze równanie, w którym niewiadomymi są współrzędne x_C oraz y_C punktu C, np. $\sqrt{(x_C + 3)^2 + (y_C - 2)^2} = 5\sqrt{2}$

ALBO

- wyznaczy odległość AC w zależności od pierwszej współrzędnej punktu C: $|AC| = \sqrt{\left(x_C - (-3)\right)^2 + (x_C - 1 - 2)^2}$ **oraz** obliczy odległość d punktu A od prostej $y = x - 1$: $d = 3\sqrt{2}$,

ALBO

- zapisze układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi x_B i x_C , np.
  $\frac{1}{2} \cdot |(x_B + 3) \cdot (x_C - 3) - (x_B - 3) \cdot (x_C + 3)| = 15$
  i $\sqrt{(x_C + 3)^2 + (x_C - 3)^2} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (x_C - x_B)^2}$,

ALBO

- wyznaczy współrzędne punktu C w zależności od x_B:
  $C = \left(\frac{x_B^2 - 9}{2x_B}, \frac{x_B^2 - 2x_B - 9}{2x_B}\right)$ (sposób 3.),

ALBO

- zapisze jedno z równań z dwiema niewiadomymi x_B i y_B :
  $\sqrt{(x_B - 0)^2 + (y_B + 1)^2} = \sqrt{2}$ lub $\sqrt{(x_B - 0)^2 + (y_B + 1)^2} = 9\sqrt{2}$ (sposób 4.),

ALBO

- zapisze równanie z dwiema niewiadomymi x_C i y_C :
  $\sqrt{(x_C - 0)^2 + (y_C + 1)^2} = 4\sqrt{2}$ (sposób 4.).

Zdający otrzymuje .... 4 pkt
gdy:

- zapisze równanie z jedną niewiadomą, pozwalające wyznaczyć współrzędne punktu C lub punktu B, np. $\sqrt{(x_C + 3)^2 + (x_C - 3)^2} = 5\sqrt{2}$
  LUB
  $$\sqrt{(4 - x_B)^2 + (4 - x_B)^2} = 5\sqrt{2},$$
  LUB
  $$\sqrt{(x_C - 0)^2 + (x_C - 1 + 1)^2} = 4\sqrt{2}$$

ALBO

- zapisze równanie z niewiadomą x_B:

$$\left((x_B + 3)^2 + (x_B - 3)^2\right)\left(\left(\frac{x_B^2 - 9}{2x_B} - \frac{x_B - 3}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_B^2 - 2x_B - 9}{2x_B} - \frac{x_B + 1}{2}\right)^2\right) = 900 \text{ (sposób 3.),}$$

ALBO

- zapisze dwa równania z niewiadomą x_B:

$\sqrt{(x_B-0)^2+(x_B-1+1)^2}=\sqrt{2}$ i $\sqrt{(x_B-0)^2+(x_B-1+1)^2}=9\sqrt{2}$ (sposób 4.).

Zdający otrzymuje .... 5 pkt
gdy nie utożsamia żadnego wierzchołka B z żadnym z wierzchołków C (ani C z B) **oraz** spełni jeden z poniższych warunków:

1) obliczy odcięte punktów C_1 i C_2
2) obliczy odcięte punktów B_1, B_2, B_3, B_4
3) obliczy odciętą jednego z punktów C i odcięte odpowiadających temu punktowi dwóch punktów B
4) obliczy odcięte dwóch punktów B i odcięte punktów C, odpowiadających tym punktom B.

Zdający otrzymuje .... 6 pkt
gdy obliczy współrzędne punktów B i C oraz zapisze te punkty w odpowiednich parach:
$C=(4,3)$ i $B=(-1,-2)$ oraz
$C=(4,3)$ i $B=(9,8)$, oraz
$C=(-4,-5)$ i $B=(1,0)$, oraz
$C=(-4,-5)$ i $B=(-9,-10)$.

Uwagi:

1. Jeśli zdający obliczy długości odcinków AD, AC i CD (punkt D jest rzutem prostokątnym punktu A na prostą o równaniu $y=x-1$) i odczyta współrzędne punktu C z rysunku, gubiąc jedno rozwiązanie, to otrzymuje **4 punkty**.
2. Jeśli zdający rozważa trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AB|=|AC|$, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **1 punkt** (za obliczenie odległości punktu A od prostej BC lub zapisanie współrzędnych punktu B (lub C) za pomocą jednej zmiennej, lub zapisanie równania $\frac{1}{2}\cdot|(x_B+3)\cdot(y_C-2)-(y_B-2)\cdot(x_C+3)|=15$), o ile nie nabył praw do innej punktacji.
3. Jeśli zdający popełni w rozwiązaniu błąd merytoryczny (np. zamiana miejscami współrzędnych punktu, błędne zastosowanie wzoru na odległość punktu od prostej, błędne zastosowanie wzorów skróconego mnożenia, stosowanie nieistniejącego wzoru $\sqrt{t+u}=\sqrt{t}+\sqrt{u}$, błędnie zapisana równość wynikająca z twierdzenia Pitagorasa) i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **4 punkty**.
4. Jeśli zdający popełni w rozwiązaniu błąd rachunkowy, w konsekwencji którego otrzymuje dwie pary punktów, to może otrzymać co najwyżej **5 punktów**.
5. Jeśli zdający narysuje w układzie współrzędnych prostą o równaniu $y=x-1$, zaznaczy punkt A oraz jedną parę punktów B i C i na tej podstawie zapisze współrzędne wierzchołków B i C jednego z trójkątów spełniających warunki zadania oraz sprawdzi rachunkiem, że pole tego trójkąta jest równe 15, to otrzymuje **1 punkt**.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Obliczamy odległość d punktu A od prostej $x-y-1=0$: $d=\frac{|-3-2-1|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$.

Obliczona odległość d jest równa wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka A na bok BC.

Obliczamy długość boku $|BC|$:

$$P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot d\cdot |BC|$$

$$|BC|=\frac{2P_{\Delta ABC}}{d}=5\sqrt{2}$$

Niech x_C oznacza pierwszą współrzędną punktu C. Punkt C leży na prostej o równaniu $y=x-1$, zatem $C=(x_C\,,x_C-1)$.

Korzystając z warunku $|AC|=|BC|$ oraz ze wzoru na długość odcinka, otrzymujemy kolejno

$$\sqrt{\left(x_C-(-3)\right)^2+(x_C-1-2)^2}=5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{(x_C+3)^2+(x_C-3)^2}=5\sqrt{2}$$

$$x_C^2+6x_C+9+x_C^2-6x_C+9=50$$

$$2x_C^2-32=0$$

$$2(x_C-4)(x_C+4)=0$$

$$x_C=4 \quad \text{lub} \quad x_C=-4$$

Zatem $C=(4,3)$ lub $C=(-4,-5)$.

Niech x_B oznacza pierwszą współrzędną punktu B. Punkt B leży na prostej o równaniu $y=x-1$, zatem $B=(x_B\,,x_B-1)$.

Ponieważ $|BC|=5\sqrt{2}$, więc dla $C=(4,3)$ otrzymujemy

$$\sqrt{(4-x_B)^2+\left(3-(x_B-1)\right)^2}=5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{(4-x_B)^2+(4-x_B)^2}=5\sqrt{2}$$

$$2\cdot(4-x_B)^2=50$$

$$|4-x_B|=5$$

$$x_B=-1 \quad \text{lub} \quad x_B=9$$

Zatem $B=(-1,-2)$ lub $B=(9,8)$.

Obliczamy współrzędne punktu B dla $C = (-4, -5)$:

$$|BC| = 5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{(-4 - x_B)^2 + \left(-5 - (x_B - 1)\right)^2} = 5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{(-4 - x_B)^2 + (-4 - x_B)^2} = 5\sqrt{2}$$

$$2 \cdot (-4 - x_B)^2 = 50$$

$$|4 + x_B| = 5$$

$$x_B = 1 \quad \text{lub} \quad x_B = -9$$

Zatem $B = (1, 0)$ lub $B = (-9, -10)$.

Warunki zadania spełniają cztery pary punktów:
$C = (4, 3)$ i $B = (-1, -2)$ oraz
$C = (4, 3)$ i $B = (9, 8)$, oraz
$C = (-4, -5)$ i $B = (1, 0)$, oraz
$C = (-4, -5)$ i $B = (-9, -10)$.

Uwaga:
Współrzędne punktu C możemy otrzymać, rozwiązując układ równań
$$\begin{cases} y = x - 1 \\ (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 50 \end{cases}$$

<u>Sposób 2.</u>
Punkty B i C leżą na prostej o równaniu $y = x - 1$, zatem $B = (x_B\, , x_B - 1)$ oraz $C = (x_C\, , x_C - 1)$.
Korzystamy ze wzoru na pole trójkąta

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)|$$

i uwzględniamy warunek $P_{\Delta ABC} = 15$:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |(x_B + 3) \cdot (x_C - 1 - 2) - (x_B - 1 - 2) \cdot (x_C + 3)|$$

$$15 = \frac{1}{2}|6x_C - 6x_B|$$

$$5 = |x_C - x_B|$$

Stąd i z tego, że $|AC| = |BC|$, otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} |AC| = |BC| \\ |x_C - x_B| = 5 \end{cases}$$

Zatem

(1) $\begin{cases} \sqrt{(x_C+3)^2+(x_C-3)^2} = \sqrt{(x_C-x_B)^2+(x_C-x_B)^2} \\ x_C - x_B = 5 \end{cases}$

lub

(2) $\begin{cases} \sqrt{(x_C+3)^2+(x_C-3)^2} = \sqrt{(x_C-x_B)^2+(x_C-x_B)^2} \\ x_C - x_B = -5 \end{cases}$

Rozwiązujemy układ równań (1):

$$\begin{cases} x_C^2+6x_C+9+x_C^2-6x_C+9 = 5^2+5^2 \\ x_C - x_B = 5 \end{cases}$$

Z pierwszego równania otrzymujemy równanie kwadratowe $2x_C^2+18=50$. Stąd $x_C=4$ lub $x_C=-4$.
Obliczamy współrzędne punktów B i C.
Dla $x_C=4$ otrzymujemy $C=(4,3)$ i $B=(-1,-2)$.
Dla $x_C=-4$ otrzymujemy $C=(-4,-5)$ i $B=(-9,-10)$.

Rozwiązujemy układ równań (2):

$$\begin{cases} x_C^2+6x_C+9+x_C^2-6x_C+9 = 5^2+5^2 \\ x_C - x_B = -5 \end{cases}$$

Z pierwszego równania otrzymujemy równanie kwadratowe $2x_C^2+18=50$. Stąd $x_C=4$ lub $x_C=-4$.
Obliczamy współrzędne punktów B i C.
Dla $x_C=4$ otrzymujemy $C=(4,3)$ i $B=(9,8)$.
Dla $x_C=-4$ otrzymujemy $C=(-4,-5)$ i $B=(1,0)$.
Warunki zadania spełniają cztery pary punktów:
$C=(4,3)$ i $B=(-1,-2)$ oraz
$C=(4,3)$ i $B=(9,8)$, oraz
$C=(-4,-5)$ i $B=(1,0)$, oraz
$C=(-4,-5)$ i $B=(-9,-10)$.

<u>Sposób 3.</u>
Niech x_B oznacza pierwszą współrzędną punktu B. Punkt B leży na prostej o równaniu $y=x-1$, zatem $B=(x_B, x_B-1)$. Środek S podstawy AB ma współrzędne

$$S=\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)=\left(\frac{-3+x_B}{2},\frac{2+x_B-1}{2}\right)=\left(\frac{x_B-3}{2},\frac{x_B+1}{2}\right)$$

Jeśli $x_B=x_A=-3$, to wtedy $S=\left(\frac{-3-3}{2},\frac{-3+1}{2}\right)=(-3,-1)$, prosta AB ma równanie $x=-3$, więc prosta zawierająca wysokość trójkąta ABC opuszczoną z wierzchołka C ma równanie $y=-1$. Wobec tego $C=(x_C,-1)$. Punkt C leży na prostej o równaniu

$y = x - 1$, więc $-1 = x_C - 1$, czyli $x_C = 0$. Zatem $C = (0, -1)$. Podstawa AB trójkąta ABC ma wtedy długość $|AB| = 6$, a wysokość SC jest równa $|SC| = 3$. Pole trójkąta jest wtedy równe

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |SC| = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9 \neq 15$$

Zatem $x_B \neq -3$, co oznacza, że prostą AB można opisać równaniem kierunkowym. Współczynnik kierunkowy tej prostej jest równy

$$a_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{x_B - 1 - 2}{x_B - (-3)} = \frac{x_B - 3}{x_B + 3}$$

Jeśli $x_B = 3$, to wtedy $S = \left(\frac{3-3}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = (0, 2)$, $y_B = 2$ i prosta AB ma równanie $y = 2$, więc prosta zawierająca wysokość trójkąta ABC opuszczoną z wierzchołka C ma równanie $x = 0$. Wobec tego $C = (0, -1)$. Podstawa AB trójkąta ABC ma wtedy długość $|AB| = 6$, a wysokość SC jest równa $|SC| = 3$. Pole trójkąta jest wtedy równe

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |SC| = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9 \neq 15$$

Zatem $x_B \neq 3$.
Prosta SC jest prostopadła do prostej AB, więc współczynnik kierunkowy prostej SC jest równy

$$a_{SC} = -\frac{x_B + 3}{x_B - 3}$$

Zatem równanie prostej SC ma postać

$$y - y_S = a_{SC}(x - x_S)$$

$$y - \frac{x_B + 1}{2} = -\frac{x_B + 3}{x_B - 3} \cdot \left(x - \frac{x_B - 3}{2}\right)$$

$$y = -\frac{x_B + 3}{x_B - 3} \cdot x + x_B + 2$$

Wyznaczamy współrzędne punktu C, rozwiązując układ równań $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -\frac{x_B+3}{x_B-3} \cdot x + x_B + 2 \end{cases}$

Stąd

$$\left(\frac{x_B + 3}{x_B - 3} + 1\right) \cdot x = x_B + 3$$

$$\frac{2x_B}{x_B - 3} \cdot x = x_B + 3$$

Gdy $x_B = 0$, to równanie jest sprzeczne, więc $x_B \neq 0$. Możemy zatem podzielić obie strony równania przez $\frac{2x_B}{x_B - 3}$, otrzymując

$$x = \frac{(x_B + 3) \cdot (x_B - 3)}{2x_B} = \frac{x_B^2 - 9}{2x_B}$$

Zatem $y = \frac{(x_B)^2 - 9}{2x_B} - 1 = \frac{(x_B)^2 - 2x_B - 9}{2x_B}$, czyli $C = \left(\frac{(x_B)^2 - 9}{2x_B}, \frac{(x_B)^2 - 2x_B - 9}{2x_B}\right)$.

Pole trójkąta ABC jest równe 15, więc $\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |SC| = 15$ i stąd otrzymujemy kolejno

$$|AB|^2 \cdot |SC|^2 = 900$$

$$((x_B + 3)^2 + (x_B - 3)^2)\left(\left(\frac{x_B^2 - 9}{2x_B} - \frac{x_B - 3}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_B^2 - 2x_B - 9}{2x_B} - \frac{x_B + 1}{2}\right)^2\right) = 900$$

$$(2x_B^2 + 18)\left(\left(\frac{x_B^2 - 9 - x_B^2 + 3x_B}{2x_B}\right)^2 + \left(\frac{x_B^2 - 2x_B - 9 - x_B^2 - x_B}{2x_B}\right)^2\right) = 900$$

$$2(x_B^2 + 9)\left(\frac{9}{4}\left(\frac{x_B - 3}{x_B}\right)^2 + \frac{9}{4}\left(\frac{x_B + 3}{x_B}\right)^2\right) = 900$$

$$(x_B^2 + 9)\left(\left(\frac{x_B - 3}{x_B}\right)^2 + \left(\frac{x_B + 3}{x_B}\right)^2\right) = 200$$

$$(x_B^2 + 9)\left(\frac{x_B^2 - 6x_B + 9 + x_B^2 + 6x_B + 9}{x_B^2}\right) = 200$$

$$(x_B^2 + 9)\left(\frac{2x_B^2 + 18}{x_B^2}\right) = 200$$

$$\frac{2}{x_B^2}(x_B^2 + 9)^2 = 200$$

$$(x_B^2 + 9)^2 = 100x_B^2$$

$$(x_B^2 + 9)^2 - (10x_B)^2 = 0$$

$$(x_B^2 + 9 - 10x_B)(x_B^2 + 9 + 10x_B) = 0$$

$$(x_B^2 - 10x_B + 9)(x_B^2 + 10x_B + 9) = 0$$

$$(x_B - 1)(x_B - 9)(x_B + 1)(x_B + 9) = 0$$

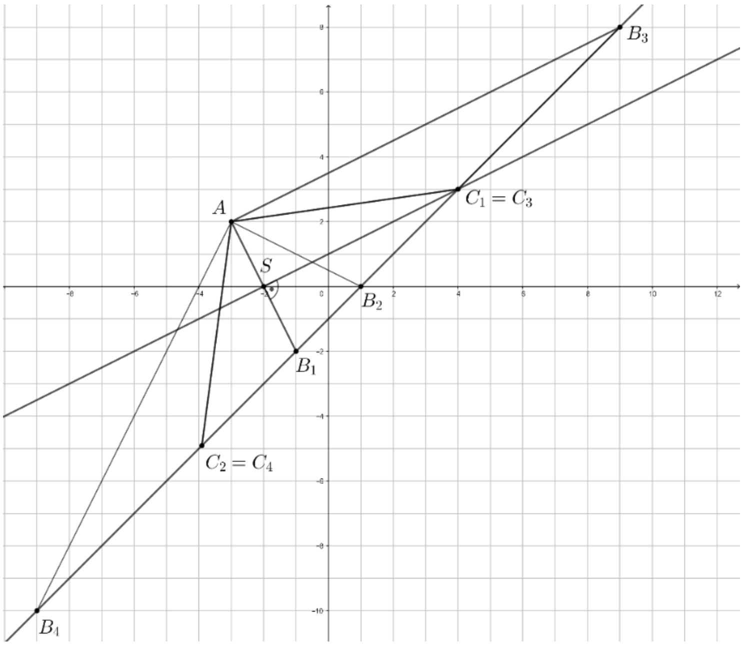
$$x_B = 1 \quad \text{lub} \quad x_B = 9 \quad \text{lub} \quad x_B = -1 \quad \text{lub} \quad x_B = -9$$

Gdy $x_B = 1$, to $B = (1, 0)$ i $C = \left(\frac{1^2 - 9}{2 \cdot 1}, \frac{1^2 - 2 \cdot 1 - 9}{2 \cdot 1}\right) = (-4, -5)$.

Gdy $x_B = 9$, to $B = (9, 8)$ i $C = \left(\frac{9^2 - 9}{2 \cdot 9}, \frac{9^2 - 2 \cdot 9 - 9}{2 \cdot 9}\right) = (4, 3)$.

Gdy $x_B = -1$, to $B = (-1, -2)$ i $C = \left(\frac{(-1)^2 - 9}{2 \cdot (-1)}, \frac{(-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 9}{2 \cdot (-1)}\right) = (4, 3)$.

Gdy $x_B = -9$, to $B = (-9, -10)$ i $C = \left(\frac{(-9)^2 - 9}{2 \cdot (-9)}, \frac{(-9)^2 - 2 \cdot (-9) - 9}{2 \cdot (-9)}\right) = (-4, -5)$.



Sposób 4.

Obliczamy odległość d punktu $A = (-3, 2)$ od prostej $x - y - 1 = 0$:

$$d = \frac{|-3 - 2 - 1|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

Obliczona odległość jest wysokością trójkąta ABC opuszczoną na prostą BC. Ponieważ pole trójkąta ABC jest równe 15, więc $\frac{1}{2} \cdot d \cdot |BC| = 15$ i stąd $|BC| = \frac{30}{3\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$.

Niech D oznacza spodek wysokości trójkąta ABC opuszczonej na prostą BC.

Obliczamy współrzędne punktu D.

Prosta prostopadła do prostej o równaniu $y = x - 1$, przechodząca przez punkt A, jest określona równaniem $y - 2 = -(x + 3)$, czyli $y = -x - 1$.

Punkt D jest punktem wspólnym prostych BC i AD, zatem

$$x - 1 = -x - 1$$

więc $x = 0$ i $y = 0 - 1 = -1$, czyli $D = (0, -1)$.

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta prostokątnego ADC i wobec $|AD| = d = 3\sqrt{2}$ oraz $|AC| = |BC| = 5\sqrt{2}$ otrzymujemy $|CD| = 4\sqrt{2}$.

Niech $C = (x_C , x_C - 1)$. Ponieważ $|CD| = 4\sqrt{2}$, więc

$$\sqrt{(x_C)^2 + (x_C - 1 + 1)^2} = 4\sqrt{2}$$

a stąd

$$2(x_C)^2 = 32$$

Zatem ${x_C}^2 = 16$, czyli $x_C = 4$ lub $x_C = -4$.

Otrzymujemy punkty o współrzędnych: $C = (4, 3)$ lub $C = (-4, -5)$.

Należy rozważyć dwa przypadki.

Przypadek 1. (gdy punkt D leży na boku BC).

Punkt B leży na prostej o równaniu $y = x - 1$, więc $B = (x_B , x_B - 1)$.

Ponieważ D leży na boku BC, więc $|BD| = |BC| - |CD| = 5\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = \sqrt{2}$. Zatem

$$\sqrt{(x_B - 0)^2 + (x_B - 1 + 1)^2} = \sqrt{2}$$

i stąd $2(x_B)^2 = 2$, czyli $x_B = 1$ lub $x_B = -1$.
Otrzymujemy punkty o współrzędnych: $B = (1, 0)$ lub $B = (-1, -2)$.
Gdy $B = (1, 0)$, to wtedy $C = (-4, -5)$, a gdy $B = (-1, -2)$, to $C = (4, 3)$, gdyż punkt D leży między punktami B i C.

Przypadek 2. (gdy punkt D nie leży na boku BC).
Punkt B leży na prostej o równaniu $y = x - 1$, więc $B = (x_B, x_B - 1)$.
Ponieważ D nie leży na boku BC, więc $|BD| = |CD| + |BC| = 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$. Zatem

$$\sqrt{(x_B - 0)^2 + (x_B - 1 + 1)^2} = 9\sqrt{2}$$

i stąd $2(x_B)^2 = 81 \cdot 2$, czyli $x_B = 9$ lub $x_B = -9$.
Otrzymujemy punkty o współrzędnych: $B = (9, 8)$ lub $B = (-9, -10)$.
Gdy $B = (9, 8)$, to wtedy $C = (4, 3)$, a gdy $B = (-9, -10)$, to $C = (-4, -5)$, gdyż punkt B leży między punktami D i C.

Ostatecznie otrzymujemy cztery trójkąty spełniające warunki zadania o wierzchołkach
$A = (-3, 2)$ oraz
$B = (1, 0)$ i $C = (-4, -5)$ lub
$B = (-1, -2)$ i $C = (4, 3)$, lub
$B = (9, 8)$ i $C = (4, 3)$, lub
$B = (-9, -10)$ i $C = (-4, -5)$.

Zadanie 15. (0–7)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: R11.6) stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.

Zasady oceniania dla sposobu 1.

Część a)

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy wyznaczy i zapisze długość a podstawy oraz wysokość h trójkąta w zależności od długości b ramienia trójkąta: $a = 18 - 2b$, $h = \sqrt{18b - 81}$.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy zapisze pole trójkąta jako funkcję jednej zmiennej b:

$$P(b) = \frac{(18 - 2b) \cdot \sqrt{18b - 81}}{2} = \frac{\sqrt{(18 - 2b)^2(18b - 81)}}{2}$$

Część b)

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy poprawnie wyznaczy dziedzinę funkcji P: $\left(\frac{9}{2}, 9\right)$.

Część c)

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy wyznaczy wzór pochodnej funkcji f, np.

$f'(b) = (-72 + 8b)(18b - 81) + (324 - 72b + 4b^2) \cdot 18$ lub

$f'(b) = 216b^2 - 3240b + 11664$, lub $f'(b) = 216(b^2 - 15b + 54)$.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy obliczy miejsca zerowe pochodnej funkcji f: $b = 6$.

Zdający otrzymuje .... 3 pkt
gdy zbada znak pochodnej funkcji f: $f'(b) > 0$ dla $b \in \left(\frac{9}{2}, 6\right)$ oraz $f'(b) < 0$ dla $b \in (6, 9)$ oraz wyznaczy (z uzasadnieniem) wartość zmiennej b, dla której funkcja f osiąga wartość największą, np.
funkcja f zmiennej b (określona na przedziale $\left(\frac{9}{2}, 9\right)$) jest rosnąca w przedziale $\left(\frac{9}{2}, 6\right]$ oraz malejąca w przedziale $[6, 9)$, więc w punkcie $b = 6$ osiąga największą wartość.

Zdający otrzymuje .... 4 pkt
gdy zapisze, że długość podstawy i ramienia trójkąta o największym polu są równe odpowiednio $a = 6$ i $b = 6$.

Uwagi do części c):

1. Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak i zaznaczając na rysunku, np. znakami „+" i „-", znak pochodnej.
2. Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja posiada wartość największą dla wyznaczonej wartości b, przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuację, gdy zdający:
   – opisuje (słownie lub graficznie -np. przy użyciu strzałek) monotoniczność funkcji f
   lub
   – zapisuje, że dla wyznaczonej wartości b funkcja f ma maksimum lokalne i jest to jednocześnie jej największa wartość.
   Jeżeli zdający nie przedstawi takiego uzasadnienia, to za część c) może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.
3. Jeśli zdający błędnie wyznaczy dziedzinę funkcji P zmiennej b, to może otrzymać punkt za dwa ostatnie kroki w części c) tylko wtedy, gdy wyznaczone przez zdającego miejsce zerowe pochodnej należy do części wspólnej wyznaczonej przez zdającego dziedziny i przedziału $\left(\frac{9}{2}, 9\right)$.
4. Jeśli zdający uzasadnia istnienie największej wartości funkcji pola trójkąta w zbiorze $\mathbb{R}$, to nie otrzymuje punktu za krok trzeci w części c).
5. Jeśli w części c) zdający bada błędną funkcję , np. $f(b) = \frac{(18-2b)(18b-81)}{2}$, to za część c) otrzymuje **0 punktów**.

Zasady oceniania dla sposobu 2.

Część a)

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy zapisze długość a podstawy w zależności od długości b ramienia trójkąta oraz długości potrzebnych do zastosowania wzoru Herona : $a = 18 - 2b$, $p = \frac{2b+a}{2}$, $p - a = \frac{2b-a}{2}$, $p - b = \frac{a}{2}$.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy zapisze pole trójkąta jako funkcję jednej zmiennej b:

$$P(b) = \frac{(18 - 2b) \cdot \sqrt{18b - 81}}{2} = \frac{\sqrt{(18 - 2b)^2(18b - 81)}}{2}$$

Część b)

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy poprawnie wyznaczy dziedzinę funkcji P: $\left(\frac{9}{2}, 9\right)$.

Część c)

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy zapisze zależność między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną :

$$\frac{2b-9+9-b+9-b}{3} \geq \sqrt[3]{(2b-9)\cdot(9-b)\cdot(9-b)}$$

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy obliczy b, dla którego zachodzi równość średniej arytmetycznej i geometrycznej: $b=6$.

Zdający otrzymuje .... 3 pkt

gdy uzasadni, że dla $b=6$ funkcja P osiąga wartość największą.

Zdający otrzymuje .... 4 pkt

gdy zapisze, że długość podstawy i ramienia trójkąta o największym polu są równe odpowiednio $a=6$, $b=6$.

Przykładowe pełne rozwiązania

<u>Sposób 1.</u>

a)

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

a – długość podstawy trójkąta,

b – długość ramienia trójkąta,

h – wysokość trójkąta.

Obwód trójkąta jest równy 18, więc $a+2b=18$ i stąd $a=18-2b$.

Z geometrycznych warunków zadania wynika, że $a \in (0,+\infty)$ oraz $b \in (0,+\infty)$, więc $18-2b>0$, zatem $b \in (0,9)$.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa i związku $a=18-2b$, otrzymujemy

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2$$

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{1}{2}(18-2b)\right)^2$$

$$h^2 = b^2 - (9-b)^2$$

$$h^2 = 18b - 81$$

$$h = \sqrt{18b-81}$$

Musi zachodzić $18b - 81 > 0$, więc $b > \frac{81}{18}$. Zatem $b \in \left(\frac{9}{2}, 9\right)$.

Pole trójkąta o podstawie a i wysokości h jest równe $P = \frac{ah}{2}$.

Zapisujemy pole trójkąta jako funkcję P zmiennej b:

$$P(b) = \frac{(18 - 2b) \cdot \sqrt{18b - 81}}{2} \quad \text{dla} \quad b \in \left(\frac{9}{2}, 9\right)$$

b)

Z geometrycznych warunków zadania wynika, że $a \in (0, +\infty)$ oraz $b \in (0, +\infty)$, więc $18 - 2b > 0$, zatem $b \in (0, 9)$.

Z warunku trójkąta $2b > a$, czyli $2b > 18 - 2b$, więc $b > \frac{9}{2}$. Zatem $b \in \left(\frac{9}{2}, 9\right)$.

Dziedziną tej funkcji jest przedział $\left(\frac{9}{2}, 9\right)$.

c)

Przekształcamy wzór funkcji P:

$$P(b) = \frac{(18 - 2b) \cdot \sqrt{18b - 81}}{2} = \frac{\sqrt{(18 - 2b)^2(18b - 81)}}{2}$$

Tworzymy funkcję pomocniczą f określoną wzorem

$f(b) = (18 - 2b)^2(18b - 81)$ dla $b \in \left(\frac{9}{2}, 9\right)$.

Wyznaczamy pochodną funkcji f:

$$f'(b) = (-72 + 8b)(18b - 81) + (324 - 72b + 4b^2) \cdot 18 = 216b^2 - 3240b + 11664$$

Obliczamy miejsce zerowe pochodnej funkcji f:

$$f'(b) = 0$$

$$216b^2 - 3240b + 11664 = 0 \quad \text{i} \quad b \in \left(\frac{9}{2}, 9\right)$$

$$b^2 - 15b + 54 = 0 \quad \text{i} \quad b \in \left(\frac{9}{2}, 9\right)$$

$$b = 6$$

Ponieważ $f'(b) > 0$ dla $b \in \left(\frac{9}{2}, 6\right)$ oraz $f'(b) < 0$ dla $b \in (6,9)$, więc funkcja f jest rosnąca w przedziale $\left(\frac{9}{2}, 6\right\rangle$ oraz malejąca w przedziale $\langle 6, 9)$. Zatem funkcja f osiąga wartość największą dla $b = 6$.

Ponieważ funkcja $g(x) = \sqrt{x}$, określona dla każdej liczby $x \geq 0$, jest funkcją rosnącą, więc funkcja pola P osiąga wartość największą dla tego argumentu, dla którego funkcja f osiąga wartość największą, tj. dla $b = 6$. Wtedy $a = 18 - 2 \cdot 6 = 6$.

Spośród rozważanych trójkątów największe pole ma trójkąt równoboczny o boku 6.

Sposób 2.

a)

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

a – długość podstawy trójkąta,

b – długość ramienia trójkąta,

h – wysokość trójkąta.

Obwód trójkąta jest równy 18, więc $a + 2b = 18$ i stąd $a = 18 - 2b$.

Wyznaczamy pole trójkąta, korzystając ze wzoru Herona.

Trójkąt jest równoramienny, więc połowa p obwodu trójkąta jest równa $p = \frac{2b+a}{2}$ oraz $p - a = \frac{2b+a}{2} - a = \frac{2b-a}{2}$ i $p - b = \frac{2b+a}{2} - b = \frac{a}{2}$.

Zatem

$$P = \sqrt{\frac{2b+a}{2} \cdot \frac{2b-a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}$$

Ponieważ $a = 18 - 2b > 0$, więc

$$P(b) = \sqrt{\frac{2b+18-2b}{2} \cdot \frac{2b-18+2b}{2} \cdot \frac{18-2b}{2} \cdot \frac{18-2b}{2}}$$

$$P(b) = \sqrt{9 \cdot (2b-9) \cdot \left(\frac{18-2b}{2}\right)^2}$$

$$P(b) = \frac{(18-2b) \cdot \sqrt{18b-81}}{2}$$

b)

Wyznaczamy dziedzinę funkcji P.

Z geometrycznych warunków zadania wynika, że $a \in (0, +\infty)$ oraz $b \in (0, +\infty)$, więc $18 - 2b > 0$, zatem $b \in (0, 9)$.

Ponadto z warunku dla trójkąta $2b > a$, więc $2b > 18 - 2b$ i stąd $b > \frac{9}{2}$.

Dziedziną funkcji P jest przedział $\left(\frac{9}{2}, 9\right)$.

c)

Z nierówności między średnimi arytmetyczną i geometryczną dla liczb dodatnich $2b - 9$, $9 - b$, $9 - b$ otrzymujemy

$$\frac{2b-9+9-b+9-b}{3} \geq \sqrt[3]{(2b-9) \cdot (9-b) \cdot (9-b)}$$

$$3 \geq \sqrt[3]{(2b-9) \cdot (9-b)^2}$$

$$27 \geq (2b-9) \cdot (9-b)^2$$

Zatem

$$\sqrt{(2b-9)\cdot(9-b)^2} \leq 3\sqrt{3}$$

przy czym równość zachodzi tylko wtedy, gdy $2b-9=9-b$, tj. dla $b=6$.
Ponieważ

$$P(b)=\frac{(18-2b)\cdot\sqrt{18b-81}}{2}=3\sqrt{(9-b)^2\cdot(2b-9)}$$

więc $P(b)\leq 3\cdot 3\sqrt{3}$, przy czym równość zachodzi tylko wtedy, gdy $b=6$.
Zatem funkcja P osiąga wartość największą dla $b=6$. Wtedy $a=18-2\cdot 6=6$.

Spośród rozważanych trójkątów największe pole ma trójkąt równoboczny o boku 6.